Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 8
10. Juni 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 17. Juni, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Es gibt einen NFA mit nur einem Zustand, der die Sprache $\{\epsilon\}$ akzeptiert.
2. Der Schnitt jeder kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache ist regulär.
3. Es gibt keine reguläre inhärent mehrdeutige Sprache.
4. Seien $\Sigma = \{0, 1\}$ und α ein regulärer Ausdruck über Σ. Dann kann man in Zeit $O(|w|)$ entscheiden, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Teilwort v enthält mit $v \in L(\alpha)$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie,

1. dass die Sprache $L = \{a^{(2^k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.
2. dass die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten <u>erweiterte</u> kontextfreie Grammatiken, bei denen auf der rechten Seite jeder Produktion ein regulärer Ausdruck α über $\Sigma \cup V$ anstelle einer einzelnen Satzform w über $\Sigma \cup V$ stehen darf. Beim Anwenden der Produktion darf dann eine beliebige Satzform aus $L(\alpha)$ eingesetzt werden.
Diese Art von Grammatik ist in der Praxis oft praktischer, da sich mit Hilfe der Sternoperation Wiederholung leichter ausdrücken lässt. Ein Beispiel ist die Grammatik

$$G = (\{0, 1, \texttt{;}, \texttt{[}, \texttt{]}\}, \{S\}, P, S)$$

mit den Produktionen

$$S \to 1(0 \mid 1)^* \quad \mid \quad \texttt{[}S(\texttt{;}S)^*\texttt{]}$$

1. Zeigen Sie, dass erweiterte kontextfreie Grammatiken nicht ausdrucksstärker sind als gewöhnliche kontextfreie Grammatiken, indem Sie ein Verfahren angeben, wie eine erweiterte Grammatik in eine gewöhnliche Grammatik transformiert werden kann, ohne die erzeugte Sprache zu verändern.
2. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die oben angegebene Grammatik G an.

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & T \mid SS\,, \\ T & \to & aSbSb \mid c\,. \end{array}$$

Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Streicht man aus einem Wort $w \in \Sigma^*$ an beliebig vielen Stellen einen Buchstaben, so erhält man ein *verstreutes Teilwort w' von w*. Formal: $w' = u_1 u_2 \dots u_n$ mit $u_i \in \Sigma^*$ ist ein verstreutes Teilwort von $w = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \dots v_{n-1} u_n v_n$ mit $v_i \in \Sigma^*$.
Zu jeder Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $sub(L)$ wie folgt:

$$sub(L) = \{w' \mid w' \text{ ist ein verstreutes Teilwort eines Wortes } w \in L\}\,.$$

Man zeige:

1. Wenn L regulär ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls regulär.
2. Wenn L kontextfrei ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls kontextfrei.

Zusatzaufgabe 4 (Prämierung der besten Lösung, per Mail an die Übungsleitung)

Fortsetzung von Hausaufgabe 5:

3. Wenn L kontextfrei ist, dann ist $sub(L)$ sogar regulär.

Hinweis: Dieser dritte Teil zur vorangegangenen Aufgabe ist eine härtere Nuss und erfordert Einiges an Überlegungen (aber kein zusätzliches Wissen). Die besten Lösungen dieses Teils (per Mail an die Übungsleitung vor dem 25. Juni 2013) werden prämiert.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Gibt es eine Turingmaschine, die sich nie mehr als vier Schritte vom Startzustand entfernt und eine unendliche Sprache akzeptiert? Begründung!
2. Welche Sprachen lassen sich mit Turingmaschinen, die ihren Kopf immer nur nach rechts bewegen, erkennen?
3. Gibt es für jede Turingmaschine T eine Turingmaschine T' mit nur einem Zustand, die die Sprache von T akzeptiert?

Vorbereitung 2

Wir konstruieren eine Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$ wie folgt.

Zu Beginn steht, außer Leerzeichen, nur eine Sequenz von Strichen auf dem Band. Der Schreib-/Lesekopf der Turing-Maschine steht auf dem ersten Strich (von links gesehen). Die Berechnung erfolgt, indem jeweils der erste Strich (von links gesehen) durch ein Hilfszeichen X ersetzt wird und zusätzlich ein Hilfszeichen X an das linke Ende geschrieben wird. Zum Schluß werden alle Hilfszeichen von rechts nach links durch Striche ersetzt.
Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{|\}$, $\Gamma = \{|, X, \Box\}$ und $F = \{q_3\}$. Die Übergangsfunktion δ entnehmen wir der folgenden Tabelle:

Übergang	Kommentar
$\delta(q_0, \vert) = (q_1, X, L)$	ersetze erstes $\vert$ durch Hilfszeichen X
$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$	gehe nach links zum ersten X
$\delta(q_1, \Box) = (q_0, X, R)$	füge zusätzliches Hilfszeichen X am Anfang ein
$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R)$	gehe nach rechts zum ersten $\vert$
$\delta(q_0, \Box) = (q_2, \Box, L)$	alle $\vert$ abgearbeitet
$\delta(q_2, X) = (q_2, \vert, L)$	ersetze X durch $\vert$
$\delta(q_2, \Box) = (q_3, \Box, R)$	alle X durch $\vert$ ersetzt, Stopp

Spezifizieren Sie möglichst knapp den Bandinhalt in Abhängigkeit der Eingabe, wenn die Turingmaschine anhält.

Tutoraufgabe 1

Konstruieren Sie eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$, die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt. Begründen Sie, warum Ihre Konstruktion die Spezifikation erfüllt.

Tutoraufgabe 2

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $\overline{w}$ die Negation eines Wortes $w \in \{0, 1\}^*$, d.h. alle Nullen werden durch Einsen ersetzt und umgekehrt.

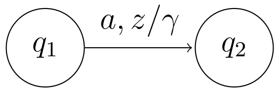
1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, die für ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ folgende Berechnung durchführt: Am Ende der Berechnung steht auf dem Band das Wort $w\overline{w}$ und der Kopf steht in einem Endzustand auf dem ersten Zeichen dieses Wortes.

Kommentieren Sie ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

2. Geben Sie nun eine Turingmaschine an, die die Sprache $L = \{w\overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$ akzeptiert. Kommentieren Sie wiederum ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

Tutoraufgabe 3

Ein Queue-Automat (kurz: QA) ist ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, z_0, \delta)$. Dabei sind Q (Zustandsmenge), Σ (Eingabealphabet) und Γ (Queuealphabet) endliche Mengen ähnlich wie bei einer Turingmaschine, $q_0 \in Q$ ist der Startzustand, und $z_0 \in \Gamma$ beschreibt die initiale Queue. Die Übergangsfunktion δ hat den Typ $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$. Graphisch kann eine Transition $(q_2, \gamma) \in \delta(q_1, a, z)$ eines Queue-Automaten wie folgt dargestellt werden:



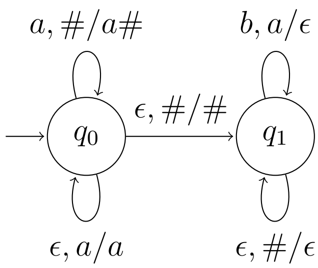
Eine Konfiguration eines Queue-Automaten ist ein Tripel $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$. Dabei ist q der aktuelle Zustand, w das noch zu lesende Wort und γ der aktuelle Inhalt der Queue. Daraus ergibt sich die Übergangsrelation $\to_A$ zwischen Konfigurationen:

$$(q, bw, z\gamma) \to_A (q', w, \gamma\gamma')\,, \qquad \text{wenn} \qquad (q', \gamma') \in \delta(q, b, z)\ .$$

Die (mit leerer Queue) akzeptierte Sprache eines Queue-Automaten ist

$$L_\epsilon(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q' \in Q.\ (q_0, w, z_0) \to_A^* (q', \epsilon, \epsilon)\}\ .$$

1. Der Queue-Automat $A_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, q_0, \#, \delta)$ sei wie folgt graphisch dargestellt:



Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort $aabb$ an.

2. Geben Sie einen Queue-Automaten A_2 an mit $L(A_2) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

3. Zeigen Sie, dass jede (deterministische) Turingmaschine durch einen Queue-Automaten simuliert werden kann.