Übung 2: Konversion RE $\rightarrow$ DFA

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 2, 2013

Definition (Regulärer Ausdruck)

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ϵ ist ein regulärer Ausdruck
- Für alle $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
- Sind α und β reguläre Ausdrücke, dann auch

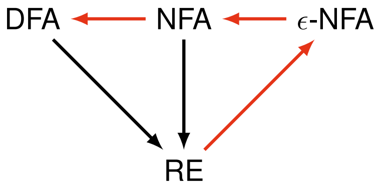
  Konkatenation $\alpha\beta$
  Veroderung $\alpha \mid \beta$
  Wiederholung α^*

Analoge Sprachdefinition, z.b. $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

Beispiel

$\alpha = (0|1)^*00$ $\quad$ $L(\alpha) = \{x \mid x \text{ Binärzahl}, x \mod 4 = 0\}$

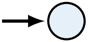
Konversionen



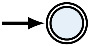
Idee (Kleene)

Für einen Ausdruck γ wird rekursiv mit struktureller Induktion ein ϵ-NFA konstruiert.

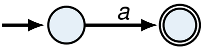
$\gamma = \emptyset$



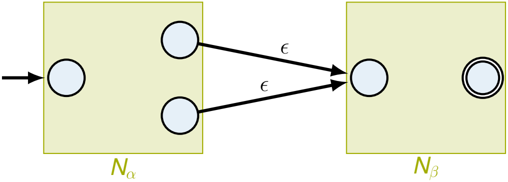
$\gamma = \epsilon$



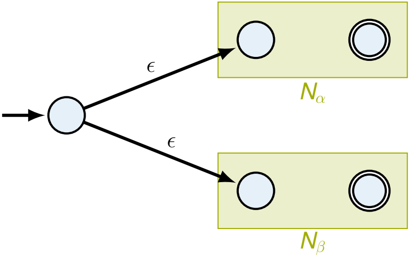
$\gamma = a \in \Sigma$



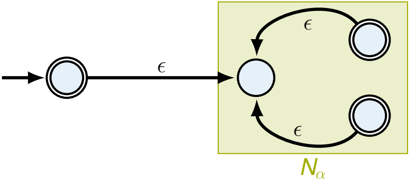
$\gamma = \alpha\beta$



$\gamma = \alpha \mid \beta$



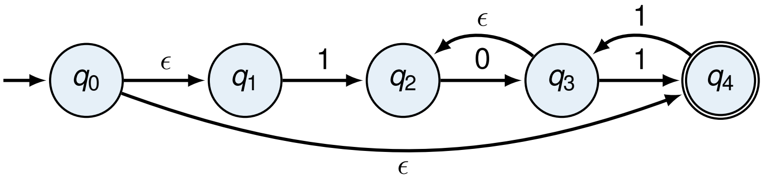
$\gamma = \alpha^*$



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

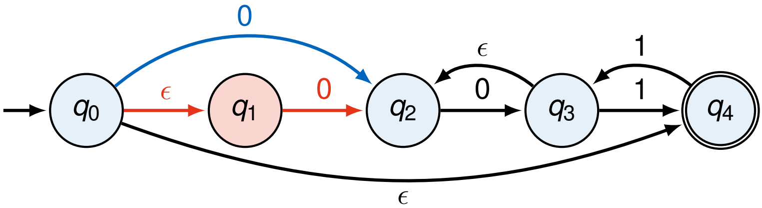
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

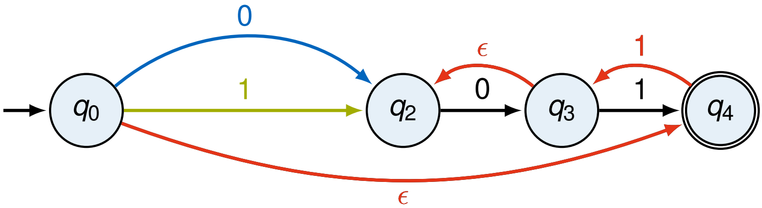
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

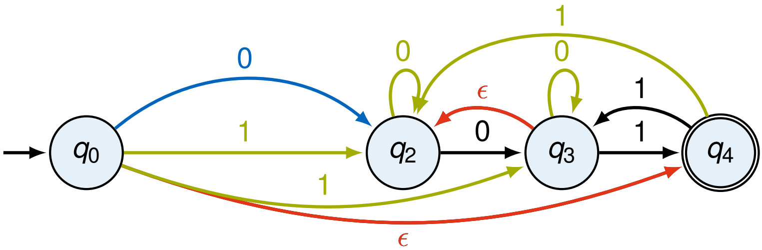
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.

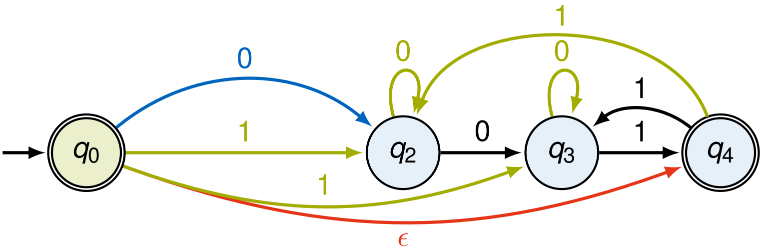


ϵ-NFA $\rightarrow$ NFA

Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

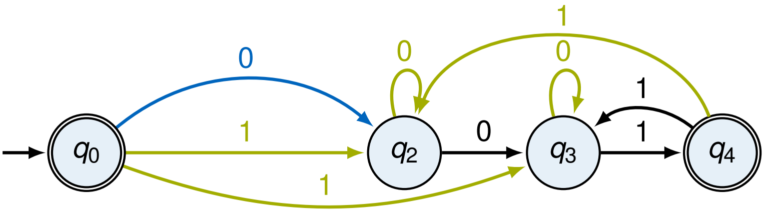
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



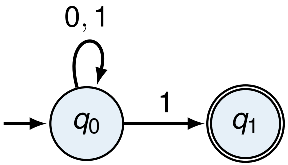
Idee (Potenzmengenkonstruktion)

Konstruiere aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ einen DFA $D = (P(Q), \Sigma, \overline{\delta}, \{q_0\}, F_M)$ mit Zuständen aus $P(Q)$.

- $\overline{\delta} : P(Q) \times \Sigma \to P(Q)$

$$\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

- $F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$



NFA $\to$ DFA

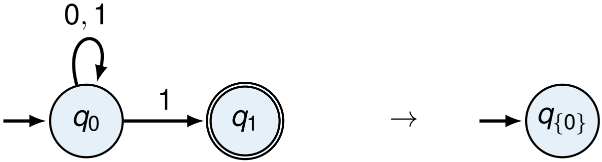
Idee (Potenzmengenkonstruktion)

Konstruiere aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ einen DFA $D = (P(Q), \Sigma, \overline{\delta}, \{q_0\}, F_M)$ mit Zuständen aus $P(Q)$.

- $\overline{\delta} : P(Q) \times \Sigma \to P(Q)$

$$\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

- $F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$



NFA $\to$ DFA

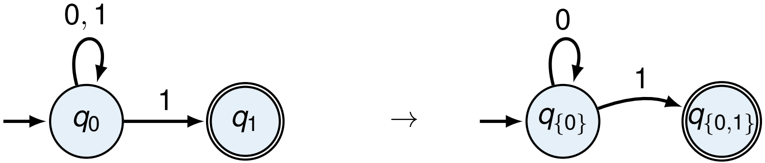
Idee (Potenzmengenkonstruktion)

Konstruiere aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ einen DFA $D = (P(Q), \Sigma, \overline{\delta}, \{q_0\}, F_M)$ mit Zuständen aus $P(Q)$.

- $\overline{\delta} : P(Q) \times \Sigma \to P(Q)$

$$\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

- $F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$



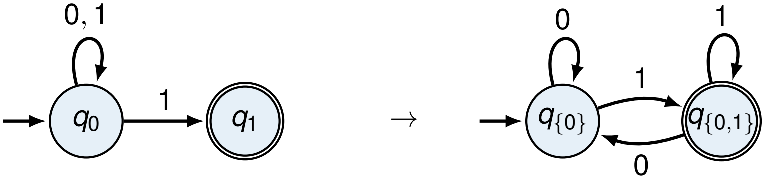
Idee (Potenzmengenkonstruktion)

Konstruiere aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ einen DFA $D = (P(Q), \Sigma, \overline{\delta}, \{q_0\}, F_M)$ mit Zuständen aus $P(Q)$.

- $\overline{\delta} : P(Q) \times \Sigma \to P(Q)$

$$\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

- $F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$



Produktautomat

Satz

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ DFAs, dann ist der Produkt-Automat

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

ein DFA, der $L(M_1) \cap L(M_2)$ akzeptiert.