Übung 3: Ardens- und Pumpinglemma

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 2, 2013

Satz

Die regulären Ausdrücke $\mathfrak{R}$ über einem Alphabet Σ bilden mit Konkatenation $\circ$ und Veroderung $|$ einen Halbring $\langle\mathfrak{R}, |, \circ, \emptyset, \epsilon\rangle$.

- *Assoziative Operationen*
- *Veroderung kommutativ*
- *Distributivität:* $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $\emptyset$ *neutral bezüglich Oder*
- ϵ *neutral bezüglich Konkatenation*

Beispiel

$$1\psi \mid 0\phi \mid \psi \equiv 0\phi \mid (1 \mid \epsilon)\psi$$

Ardens Lemma

Satz (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, dann gilt

$$X = AX \cup B \Longrightarrow X = A^*B$$

Speziell gilt für reguläre Ausdrücke

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \Longrightarrow X \equiv \alpha^*\beta$$

Beispiel

$$\psi \equiv 0\psi \mid (1 \mid \epsilon)\phi \Longrightarrow \psi \equiv 0^*(1 \mid \epsilon)\phi$$

Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

1. Ausdruck für jeden Zustand
2. Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$
\begin{aligned}
X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
&\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)^*00^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
&\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
\end{aligned}
$$

NFA $\rightarrow$ RE

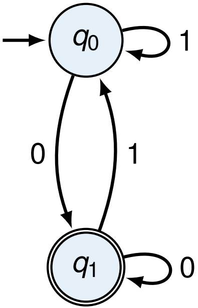
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

1. Ausdruck für jeden Zustand
2. Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned} X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\ &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\ &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\ &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\ &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\ &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0) \end{aligned}$$



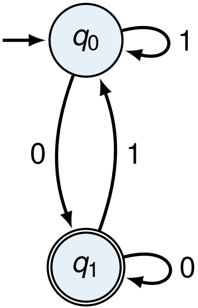
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

1. Ausdruck für jeden Zustand
2. Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$
\begin{aligned}
X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
&\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
&\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
\end{aligned}
$$



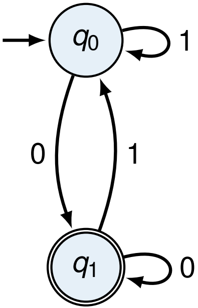
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

1. Ausdruck für jeden Zustand
2. Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$
\begin{aligned}
X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
&\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
&\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
\end{aligned}
$$

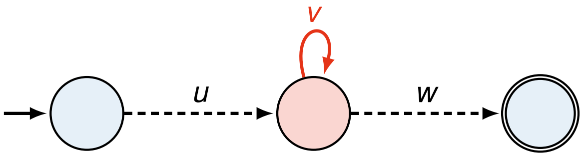
$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
&\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
&\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
\end{aligned}
$$



Satz (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^i w \in R$



Nichtregularität beweisen

Idee

Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \ \forall u, v, w.\ z = uvw \text{ nicht pumpbar}$$

Beispiel

Ist $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ regulär?

1. Sei n PL-Zahl
2. Wähle $z = a^n b^n$
3. Dann ist $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, hier: $v = a^k$ mit $k > 0$
4. Dann ist $uv^0 w \notin L$
5. Damit ist L nicht regulär.

Idee

Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \; \forall u, v, w.\; z = uvw \text{ nicht pumpbar}$$

Beispiel

Ist $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ regulär?

1. Sei n PL-Zahl
2. Wähle $z = a^n b^n$
3. Dann ist $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, hier: $v = a^k$ mit $k > 0$
4. Dann ist $uv^0 w \notin L$
5. Damit ist L nicht regulär.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{DFA} \arrow[dr] & \mathrm{NFA} \arrow[l] \arrow[d] & \epsilon\text{-}\mathrm{NFA} \arrow[l] \\
& \mathrm{RE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Satz

Für eine Darstellung D einer regulären Sprache ist entscheidbar:

Wortproblem *Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?*

Leerheitsproblem *Ist $L(D) = \emptyset$?*

Endlichkeitsproblem *Ist $|L(D)| < \infty$?*

Äquivalenzproblem *Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?*

Reguläre Sprachen

$$
\begin{tikzcd}
\text{DFA} \arrow[dr] & \text{NFA} \arrow[l] \arrow[d] & \epsilon\text{-NFA} \arrow[l] \\
& \text{RE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Satz

Für eine Darstellung D einer regulären Sprache ist *entscheidbar*:

Wortproblem *Gegeben* w*, gilt* $w \in L(D)$*?*

Leerheitsproblem *Ist* $L(D) = \emptyset$*?*

Endlichkeitsproblem *Ist* $|L(D)| < \infty$*?*

Äquivalenzproblem *Gilt* $L(D_1) = L(D_2)$*?*