Übung 5: Kontextfreie Sprachen

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 2, 2013

Definition (Kontextfreie Grammatik)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

- V endlich viele Nichtterminale (Variablen)
- Σ ein Alphabet von Terminalen
- P endlich viele Produktionen $\subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- S ein Startsymbol

Beispiel (Vorbereitung 3)

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Definition (Kontextfreie Grammatik)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

- V endlich viele Nichtterminale (Variablen)
- Σ ein Alphabet von Terminalen
- P endlich viele Produktionen $\subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- S ein Startsymbol

Beispiel (Vorbereitung 3)

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \to 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Definition (Ableitungsrelation)

Eine CFG G induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \beta$$

gdw es eine Regel $A \rightarrow \gamma$ in P mit Wörtern α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 A \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$$

Beispiel (Vorbereitung 3)

Mit den Produktionen $S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$:

$$S \rightarrow_G 0S1 \rightarrow_G 00S11 \rightarrow_G 00S1111 \rightarrow_G 0011111$$
$$\Rightarrow S \rightarrow_G^* 0011111$$

Kontextfreie Sprache

Definition (Kontextfreie Sprache)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugt die Sprache

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt kontextfrei gdw es eine kontextfreie Grammatik G gibt mit $L = L(G)$.

Induktive Sprachdefinition

Die induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter bottom-up, setzt also kleine Wörter zu größeren zusammen.

Beispiel (Vorbereitung 3)

Mit den Produktionen $S \to 0S1 \mid S11 \mid 1$:

$$\begin{array}{rcr} & & 1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & 0u1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & u11 \in L_G(S) \end{array}$$

Also z.B:

$$1 \in L_G(S) \Longrightarrow 010 \in L_G(S) \Longrightarrow 01011 \in L_G(S)$$