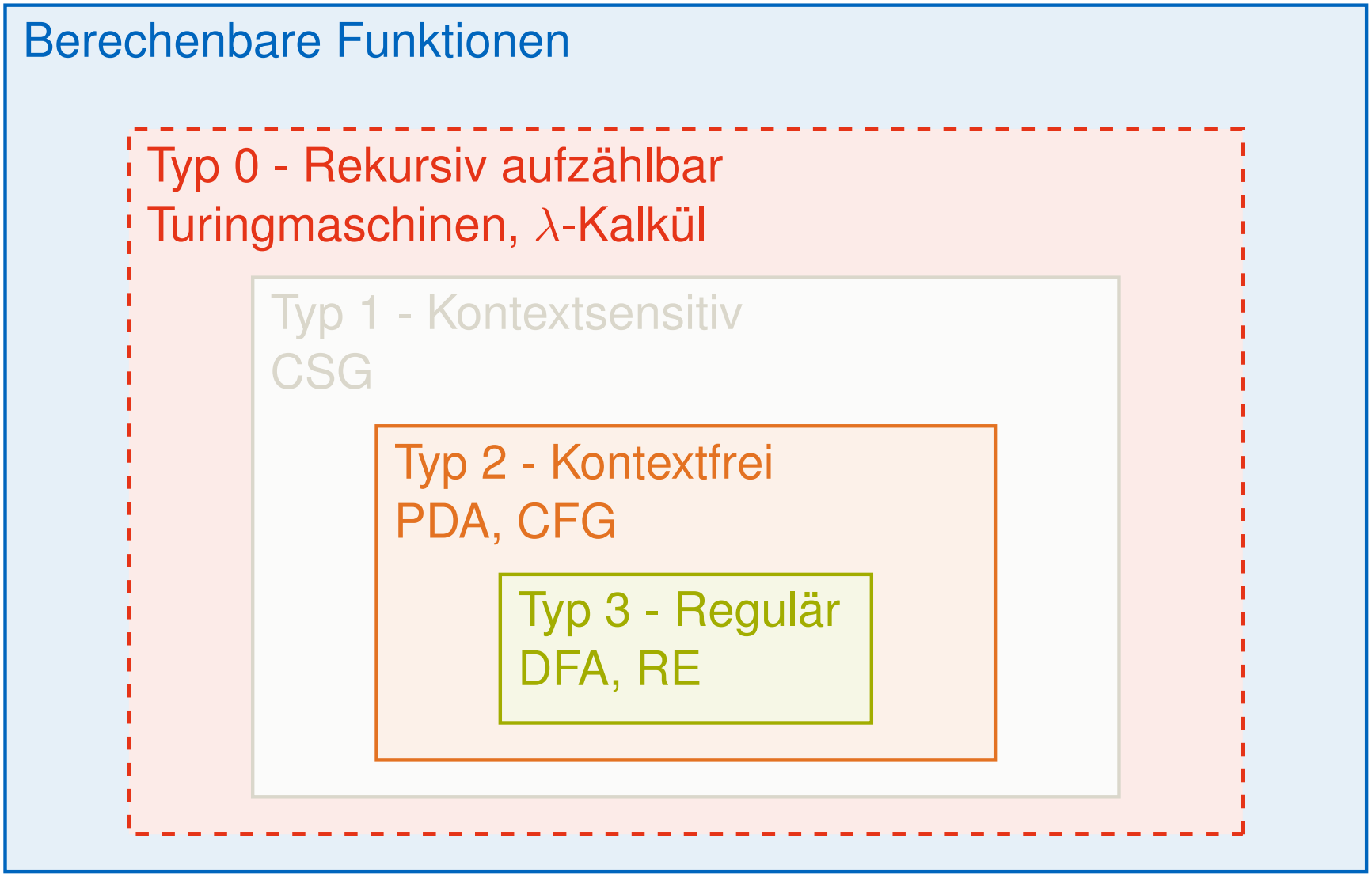
Übung 9: Berechnungsmodelle

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 2, 2013

Chomsky-Hierarchie



Definition (Intuitive Berechenbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt intuitiv berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis $f(n_1, \ldots, n_k)$ hält, falls $f(\ldots)$ definiert ist,
- und nicht terminiert, falls $f(\ldots)$ nicht definiert ist.

Churchsche These (nicht beweisbar)

Turing-Maschinen können genau alle intuitiv berechenbaren Funktionen berechnen.

Beispiel (Berechenbarkeit)

Sind die folgenden Funktionen intuitiv berechenbar?

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ die ersten } n \text{ Ziffern von } \pi \text{ darstellt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } \pi \ n \text{ Nullen am Stück vorkommen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (LOOP-Programm)

Syntax von LOOP-Programmen.
Es ist $X \in \{x_0, x_1, \ldots\}$ und $C \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P \rightarrow\ & X := X + C \\
\mid\ & X := X - C \\
\mid\ & P; P \\
\mid\ & \textbf{LOOP } X \textbf{ DO } P \textbf{ END} \\
\mid\ & \textbf{IF } X = 0 \textbf{ DO } P \textbf{ ELSE } Q \textbf{ END}
\end{aligned}
$$

- Ausgabe steht in x_0, Eingaben in $x_1, \ldots, x_n$, Rest ist 0.
- **LOOP** x_i **DO** P **END** führt P genau n mal aus, wobei n der Anfangswert von x_i ist. Zuweisungen an x_i in P ändern die Anzahl der Durchläufe nicht.

Definition (Basisfunktionen)

Primitiv Rekursiv sind:

- Die konstante Funktion 0
- Die Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$
- Die Projektionsfunktion $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, i \in [k]$

$$\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$$

Definition (Komposition)

Sind g und h_i PR und $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dann ist auch f PR:

$$f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_k(\bar{x}))$$

Basisfunktionen und Komposition

Schon PR sind:

- Konstante: 0
- Nachfolger: $s(n) = n + 1$
- Projektion: $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- Komposition: $f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_k(\bar{x}))$

Definition (Primitive Rekursion)

Das Schema der primitiven Rekursion erzeugt aus g und h die Funktion f:

$$f(0, \bar{x}) = g(\bar{x})$$
$$f(m + 1, \bar{x}) = h(f(m, \bar{x}), m, \bar{x})$$

U.a. diese Programme sind laut Vorlesung oder Übung PR:

- $add(x, y) = x + y$
- $mult(x, y) = x \cdot y$
- $pred(x) = \max\{0, x - 1\}$
- $x \dot{-} y = \max\{0, x - y\}$
- $div(x, y) = x \div y$ (Ganzzahldivision)
- $mod(x, y) = x \mod y$

- $tower(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ mit $tower(4) = 2^{16}$
- $sqr(x) = x^2$
- $twopow(n) = 2^n$
- $ifthen(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0 \\ b & n = 0 \end{cases}$

Erweitertes PR-Schema

Definition (Erweitertes PR-Schema)

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion erlaubt

$$f(0, \bar{x}) = t_0$$
$$f(m+1, \bar{x}) = t$$

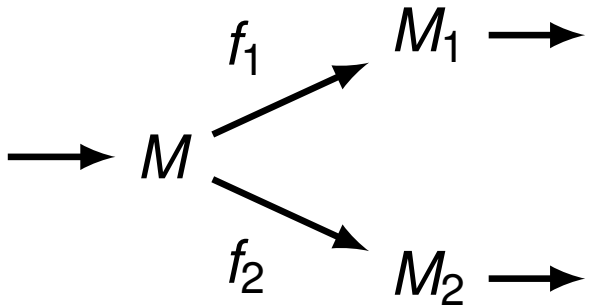
wobei

- t_0 enthält nur PR-Funktionen und die x_i
- t enthält nur $f(m, \bar{x})$, PR Funktionen, m und die x_i.

Satz

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus PR heraus.

Sind f_1 und f_2 Endzustände von M, so bezeichnet



eine Fallunterscheidung.

Beispiel (Band=0?)

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$$
$$\delta(q_0, \square) = (ja, \square, L)$$
$$\delta(q_0, a) = (nein, a, N) \qquad \text{für} a \neq 0, \square$$

Definition (WHILE-Programm)

Syntax von WHILE-Programmen.
Es ist $X \in \{x_0, x_1, \ldots\}$ und $C \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P \to\ & X := X + C \\
\mid\ & X := X - C \\
\mid\ & P; P \\
\mid\ & \textbf{WHILE } X \neq 0 \textbf{ DO } P \textbf{ END} \\
\mid\ & \textbf{LOOP } X \textbf{ DO } P \textbf{ END} \\
\mid\ & \textbf{IF } X = 0 \textbf{ DO } P \textbf{ ELSE } Q \textbf{ END}
\end{aligned}
$$

- Ausgabe steht in x_0, Eingaben in $x_1, \ldots, x_n$, Rest ist 0.
- Semantik wie erwartet.

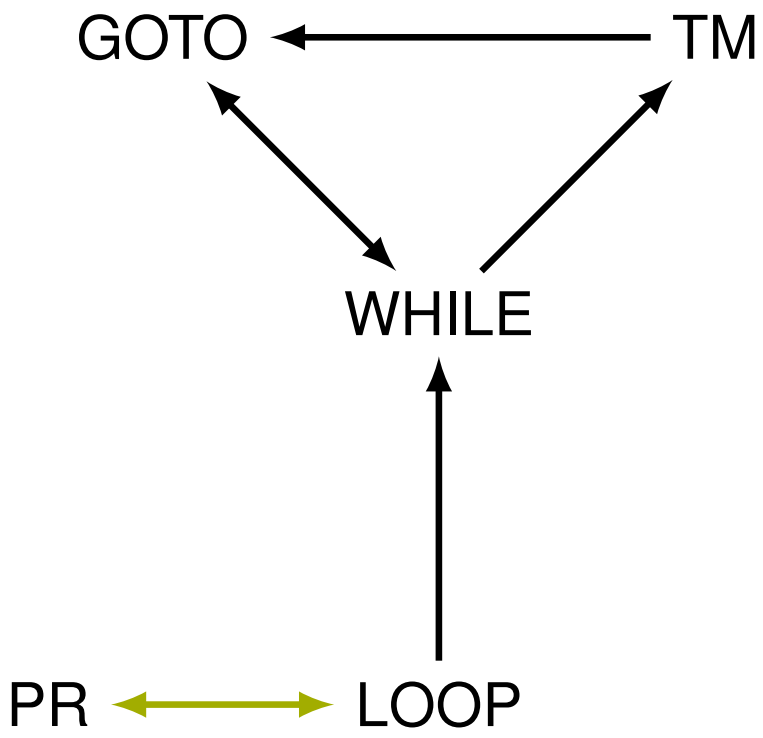
Definition (GOTO-Programm)

Syntax von GOTO-Programmen.
Es ist $X \in \{x_0, x_1, \ldots\}$ und $C \in \mathbb{N}$.
Alle Anweisungen haben eine Markierung $M_1 : A_1; M_2 : A_2$.

$$
\begin{aligned}
P \rightarrow\ & X := X + C \\
\mid\ & X := X - C \\
\mid\ & P; P \\
\mid\ & \textbf{GOTO}\ M_i \\
\mid\ & \textbf{IF}\ X = 0\ \textbf{GOTO}\ M_i \\
\mid\ & \textbf{HALT}
\end{aligned}
$$

- Ausgabe steht in x_0, Eingaben in $x_1, \ldots, x_n$, Rest ist 0.

Übersetzungen



LOOP kann in WHILE übersetzt werden, WHILE ist also mindestens so mächtig wie LOOP (sogar mächtiger).