Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 5
14. Mai 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 27. Mai, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Widerlegen Sie die Regularität der folgenden Sprachen (mit Hilfe des Pumping-Lemmas):

1. $L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w^R = w\}$
3. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$

Dabei bedeutet w^R die Umkehrung von w ("rückwärtslesen"), und $|w|_a$ gibt die Anzahl der Zeichen a in einem Wort w an.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, p, q, r\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

1. $L_1 = \{a^{\lfloor \log_2 (m+1) \rfloor} q b^m r \mid m \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_2 = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Konstruieren Sie durch Lösen entsprechender Gleichungen einen regulären Ausdruck für die Sprache $L(M)$ des DFA $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{0,1\}, \delta, s_0, \{s_0, s_1, s_3\})$ mit folgender Übergangstabelle:

s_i	$\delta(s_i, 0)$	$\delta(s_i, 1)$
s_0	s_1	s_2
s_1	s_3	s_4
s_2	s_2	s_1
s_3	s_3	s_3
s_4	s_4	s_2

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

1. Sei $L(p) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, w) \in F\}$ für $p \in Q$.

   Zeigen Sie, dass zwei Zustände p und q von A genau dann äquivalent sind, wenn $L(p) = L(q)$ gilt. (Dies gilt auch für unerreichbare Zustände.)
   Sind unerreichbare Zustände automatisch äquivalent?

2. Ein Zustand q von A heiße Fangzustand, falls von q aus kein Endzustand erreichbar ist. Zeigen Sie, dass alle Fangzustände äquivalent sind. Sind unerreichbare Zustände automatisch Fangzustände?

Hinweis: Ein Zustand q heißt erreichbar, falls es ein Eingabewort w gibt, so dass $\hat{\delta}(q_0, w) = q$ gilt. q heißt unerreichbar, falls q nicht erreichbar ist.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Die Permutationssprache L_P zu einer Sprache L besteht aus allen Permutationen aller Wörter in L. Formal setzen wir:

$$L_P = \{u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(k)} \mid k \in \mathbb{N},\ \pi \text{ Permutation und } u_1 \cdots u_k \in L\}$$

1. Geben Sie eine alternative, möglichst einfache Beschreibung der Permutationssprache zu der Sprache $L = L((ab)^*)$ an.

2. Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um anhand dieser Sprache zu zeigen, dass reguläre Sprachen nicht abgeschlossen sind unter Permutation (d.h. für eine reguläre Sprache L ist L_P nicht zwangsläufig regulär).

Zusatzaufgabe 2 (Für Interessierte, ohne Abgabe)

Sei $D = (Q, T, \delta)$ ein Markov-Diagramm mit $q_0, z \in Q$ und sei $[q_0 \rightsquigarrow z]$ die Menge aller Pfade, die von q_0 ausgehen und in z enden.

Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automat $N = (Q, Q, \beta, q_0, F)$ mit Übergangsfunktion β, der die Pfadmenge $[q_0 \rightsquigarrow z]$ akzeptiert, d.h., so dass $L(N) = [q_0 \rightsquigarrow z]$ gilt.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Kann man mit einem regulären Ausdruck kontextfreie Grammatiken beschreiben?
2. Wie kann man entscheiden, ob die Sprache einer CFG endlich ist?

Vorbereitung 2

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Gibt es endliche, nicht kontextfreie Sprachen?
2. Ist die Sprache $\{a^m b^n \mid m < n\}$ kontextfrei?
3. Welche endliche Sprache beschreibt die Grammatik mit den Produktionen $S \to aS \mid bB$ und $B \to bBb$?

Vorbereitung 3

1. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie eine Grammatik an, die alle Wörter beschreibt, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins kommen, die Anzahl der Nullen geringer als die Anzahl der Einsen ist, sowie die Länge jedes Wortes ungerade ist.
2. Gegeben sei die CFG $G = (\{S, T, U\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen

   $$S \to aTc \mid bTb \qquad T \to bT \mid Tc \mid aU \qquad U \to a \mid c$$

   Entscheiden Sie, welche der folgenden Wörter in der Sprache $L(G)$ liegen und geben Sie für von der Grammatik erzeugte Wörter eine Kette von Ableitungsschritten an:

   $$aacc \qquad abacbc \qquad bbaccb$$

Tutoraufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Finden Sie eine Grammatik G, so dass $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$.
2. Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Grammatik, d.h., zeigen Sie, dass für alle ableitbaren Wörter $w \in L(G)$ die Beziehung $\#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass alle Wörter $(ab)^n a^n$ für $n \geq 0$ in Ihrer Grammatik G ableitbar sind.

Tutoraufgabe 2

Sei $\Sigma = \{0, 1, (,), +, ^*, \boldsymbol{\emptyset}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ die Zeichenmenge, aus der reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden. Wir schreiben hier $+$ anstelle von $|$, um Zeichenverwirrungen zu vermeiden.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ beschreibt.
2. Ist Ihre Grammatik eindeutig? Falls nicht, geben Sie eine eindeutige Grammatik an, die die Bindungstärken in regulären Ausdrücken respektiert (also Konkatenation stärker als $+$ bindet).
3. Geben Sie den Syntaxbaum für das Wort 01^*0+1 mit Ihrer eindeutigen Grammatik an.

Tutoraufgabe 3

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Die zwei Operationen Spiegelung (w^R) und Negation ($\overline{w}$) sind für $w \in \Sigma^*$ wie folgt definiert:

$$w^R = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ u^R a, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

$$\overline{w} = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ \hat{a}\overline{u}, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Dabei setzen wir $\hat{0} = 1$ und $\hat{1} = 0$. Wie man leicht (etwa per Induktion) zeigen kann, gelten für diese Operationen auch die Gleichungen $(ua)^R = au^R$ und $\overline{ua} = \overline{u}\hat{a}$ für alle $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$. Im Folgenden nehmen wir diese Identitäten als bewiesen an.
Wir betrachten nun die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid w^R = \overline{w}\}$ und die Grammatik

$$G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to 0S1 \mid 1S0 \mid \epsilon\}, S).$$

Zeigen Sie: L ist genau die von der Grammatik G beschriebene Sprache.