

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 24. Juni, 13 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Die Produktionen einer Grammatik  $G = (V, \{a, b\}, P, S)$  mit  $V = \{S, X, A, B\}$  seien wie folgt gegeben.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AXSB \mid AXB, \\ X &\rightarrow a \mid SA \mid AX. \\ A &\rightarrow a, \quad B \rightarrow b. \end{aligned}$$

1. Alle Nichtterminalen aus  $V$  sind nützlich in der Grammatik  $G$ . Begründen Sie diesen Sachverhalt.
2. Geben Sie zunächst eine zu  $G$  äquivalente Grammatik  $H$  in Chomsky-Normalform an. Ist  $w = aaaabb$  aus  $S$  ableitbar? Beweisen Sie Ihre Antwort durch Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus.

### Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik  $G = (V, \{a, b, c\}, P, S)$  mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow LS \mid SR \mid L, \\ L &\rightarrow aX, & X &\rightarrow Tb \mid b, \\ R &\rightarrow Yb, & Y &\rightarrow aT \mid a, \\ T &\rightarrow aX \mid Z, & Z &\rightarrow cZZ. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie  $abab \in L(G)$ !  
Ist  $G$  mehrdeutig? Enthält  $G$  ein Nichtterminalzeichen, das nicht erzeugend ist? Begründung!
2. Zeigen Sie durch Anwendung des CYK-Algorithmus, dass  $abab^2a$  nicht ableitbar ist.  
Hinweis: Wandeln Sie zunächst  $G$  äquivalent in  $G'$  in Chomsky-Normalform um.

### Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei der Kellerautomat  $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$  mit  $\Sigma = \{a, b, \#\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$  und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned}\delta(q, \epsilon, Z_0) &= \{(q, XZ)\}, & \delta(q, a, X) &= \{(q, XY)\}, \\ \delta(q, \#, X) &= \{(q, \epsilon)\}, & \delta(q, b, Y) &= \{(q, \epsilon)\}, \\ \delta(q, a, Z) &= \{(q, \epsilon)\}.\end{aligned}$$

Leiten Sie eine Grammatik  $G$  her, die  $L_\epsilon(K)$  erzeugt. Die Korrektheit von  $G$  muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis:  $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$  ist eine Kurzschreibweise für  $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta, \emptyset)$ .

### Hausaufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten die Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ .

1. Geben Sie einen Kellerautomat  $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$  mit einelementigem  $\Gamma = \{Z_0\}$  an, der  $L$  mit leerem Keller akzeptiert.
2. Geben Sie eine Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  an, die  $L$  erzeugt.
3. Leiten Sie systematisch aus Ihrer Grammatik  $G$  einen Kellerautomat  $M$  her mit einelementiger Zustandsmenge  $Q = \{q_0\}$ , der  $L$  mit leerem Keller akzeptiert.

### Hausaufgabe 5 (2 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen Kellerautomat an, der die Sprache  $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$  mit Endzustand akzeptiert.

---

**Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.

---

## Vorbereitung 1

Vergleichen Sie die beiden folgenden WHILE-Programme:

```
WHILE  $b_0 \wedge b_1$  DO  $P$  END
```

und

```
WHILE  $b_0$  DO  $P$  END; WHILE  $b_0 \wedge b_1$  DO  $P$  END.
```

Zeigen diese Programme das gleiche Verhalten? Begründung!

## Vorbereitung 2

1. Was versteht man unter dem „erweiterten Schema der primitiven Rekursion“?
2. Was versteht man unter der „erweiterten Komposition“?
3. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

$$iszero(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad eq(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

## Vorbereitung 3

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die Funktion  $twopow(n) = 2^n$  primitiv rekursiv ist.

## Tutoraufgabe 1

Wir wollen untersuchen, ob sich (ähnlich wie bei den WHILE-Programmen) auch jedes LOOP-Programm in eine „Normalform“

LOOP  $X$  DO  $P$  END

bringen lässt, so dass  $P$  keine Schleifen mehr enthält.

Wir bezeichnen mit  $V(P)$  die Menge der Variablen, die in  $P$  vorkommen (diese Menge ist stets endlich). Für einen gegebenen Programmlauf bezeichnen wir mit  $[x]$  den Wert der Variablen  $x$  beim Start des Programms, und mit  $[x]'$  den Wert der Variablen nach Programmende.

1. Zeigen Sie: Für jedes LOOP-Programm  $P$  ohne Schleifen gibt es eine Konstante  $k$ , so dass gilt:

$$\max_{x \in V(P)} [x]' \leq \max_{x \in V(P)} [x] + k.$$

2. Zeigen Sie, dass es kein LOOP-Programm in Normalform geben kann, welches die Quadratfunktion  $n \mapsto n^2$  berechnet.

## Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

1.  $tower(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$  (d.h.  $2^{(2^{(2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}})})}$ , Turm der Höhe  $n$ ),
2.  $ifthen(n, a, b)$  mit

$$ifthen(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0, \\ b & n = 0. \end{cases}$$

## Tutoraufgabe 3

1. Sei  $f(x, y)$  primitiv rekursiv. Zeigen Sie mit Hilfe der Projektionsfunktionen  $\pi_i^k$  zusammen mit der (nicht erweiterten) Komposition, dass die Funktion  $g$  mit  $g(x, y) = f(y, x)$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  ebenfalls primitiv rekursiv ist.
2. Der Binomialkoeffizient  $binom(n, m) = \binom{n}{m}$  ist eine Funktion von  $\mathbb{N}^2$  in  $\mathbb{N}$  mit den Eigenschaften  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{0}{m} = 0$  für  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m > 0$ . Der Binomialkoeffizient erfüllt für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}.$$

Für jede natürliche Zahl  $m_0$  betrachten wir die Funktion  $b_{m_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $b_{m_0}(n) = binom(n, m_0)$ . Zeigen Sie durch Induktion über  $m_0$ , dass alle Funktionen  $b_{m_0}(n)$  mit  $m_0 \in \mathbb{N}$  primitiv rekursiv (als Funktion in  $n$ ) sind.

Hinweis: Sie dürfen aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Ergebnisse über primitiv rekursive Funktionen (z. B. erweiterte Komposition, erweitertes Rekursionsschema, primitive Rekursivität der Addition, LOOP-Programme, ...) verwenden.