Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

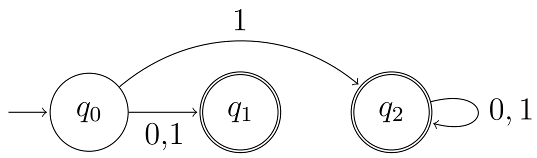
Sommersemester 2013
Übungsblatt 3
29. April 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 6. Mai, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Wir betrachten einen nichtdeterministischen Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der durch die folgende Grafik gegeben ist.



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, dessen Sprache von A akzeptiert wird.
2. Bestimmen Sie $\overline{\delta}(\{q_0, q_1\}, 1)$ und $\overline{\delta}(\{q_1\}, 1)$!
3. Geben Sie den zu A äquivalenten DFA $A' = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \overline{\delta}, \{q_0\}, \overline{F})$ in extensionaler Mengenschreibweise an! Welche Zustände von A' können entfernt werden, ohne dass die akzeptierte Sprache geändert wird!

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ die Zeichenmenge der Ziffern von 0 bis 3. Sei Q die Sprache der Zahldarstellungen zur Basis 4 ohne führende Nullen. (Beispiel: $0 \in Q,\ 2013 \in Q,\ 02013 \notin Q$. Es gilt $\#_4 2013 = 2 \cdot 4^3 + 4^1 + 3 \cdot 4^0 = \#_{10} 135$.)

Sei $L = \{w \in Q \mid \#w \bmod 3 = 2\}$.

1. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automat A, der L akzeptiert.
2. Beweisen Sie, dass A die Sprache L akzeptiert.

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer Anzahl n von Zuständen. Zeigen Sie:

1. Sei $w = w_1 w_2 \ldots w_{2n} \in \Sigma^*$ mit $|w_i| = 1$ ein Wort der Länge $2n$ und sei $q_0, q_1, \ldots, q_{2n}$ die Folge der Zustände, die M ausgehend von q_0 bei Eingabe von w annimmt. Dann gibt es k, l mit $k < l$, so dass $q_k = q_l$.
2. Falls es ein Wort w der Länge $2n$ gibt mit $w \in L(M)$, dann gibt es unendlich viele Wörter, die der Automat M akzeptiert.

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Wir betrachten das folgende einfache Modell eines Aufzugs in einem Gebäude mit 3 Stockwerken, nummeriert mit $0, 1, 2$. Der Aufzug kann folgende Aktionen durchführen:

(o) Tür öffnen (open)

(c) Tür schließen (close)

(u) Ein Stockwerk nach oben fahren (up)

(d) Ein Stockwerk nach unten fahren (down)

Dabei gelten die Einschränkungen, dass der Aufzug niemals mit offener Tür fährt, und natürlich auch nicht in Stockwerke fährt, die nicht existieren.

1. Modellieren Sie den Aufzug als NFA N über $\Sigma = \{\mathtt{o}, \mathtt{c}, \mathtt{u}, \mathtt{d}\}$, so dass $L(N)$ genau die Wörter enthält, die eine zulässige Aktionsfolge des Aufzugs darstellen.
2. Beschreiben Sie die notwendigen Änderungen, um das Modell N in einen DFA umzuwandeln!

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Das Reißverschlussprodukt von zwei Sprachen L_1 und L_2 ist wie folgt definiert:

$$L_1 \,\%\, L_2 = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \mid a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma, a_1 \dots a_n \in L_1, b_1 \dots b_n \in L_2\}$$

1. Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der $L(aba^*) \,\%\, L(bc^*)$ beschreibt.
2. Vergleichen Sie dass Reißverschlussprodukt mit dem Shuffle-Produkt aus TA3 von Blatt 2, und finden Sie zwei Sprachen A und B und ein Wort, das in $(A \,\|\, B)$, aber nicht in $A \,\%\, B$ liegt.
3. Zeigen Sie durch eine geeignete Automatenkonstruktion: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \,\%\, L_2$ regulär.

   Beschreiben Sie ihre Konstruktion zunächst informell.

Hausaufgabe 6 (4 Punkte)

Wir bezeichnen die Menge der regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ mit RE_Σ.

1. Definieren Sie eine rekursive Funktion $\mathit{eps} : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$, so dass gilt

   $$\mathit{eps}(\alpha) \iff L(\alpha) = \{\epsilon\}\,.$$

   Dafür dürfen Sie eine Funktion $\mathit{empty} : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ annehmen, für die gilt

   $$\mathit{empty}(\alpha) \iff L(\alpha) = \emptyset\,.$$

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass Ihre Funktion tatsächlich die geforderte Eigenschaft hat.
2. Sei $a \in \Sigma$. Definieren Sie eine Funktion $\mathit{finite} : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$, die entscheidet, ob ein regulärer Ausdruck eine endliche Sprache beschreibt, also

   $$\mathit{finite}(\alpha) \iff |L(\alpha)| < \infty\,.$$

Zusatzaufgabe 1 (Für Interessierte, ohne Abgabe)

Ein $\forall$-NFA ("all-NFA") ist wie ein NFA als 5-Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ definiert. Allerdings ist die akzeptierte Sprache anders definiert:

$$L_\forall(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\hat{\delta}}(\{q_0\}, w) \subseteq F\}$$

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie einen $\forall$-NFA N, so dass $L_\forall(N)$ genau die Menge aller Wörter aus Σ^* ist, die weder ein c noch das Teilwort *baba* enthalten.

2. Zeigen Sie, dass man aus jedem $\forall$-NFA N einen NFA N' konstruieren kann, so dass $L(N') = \Sigma^* \setminus L_\forall(N)$.
   Vorgehensweise: Beschreiben Sie die Konstruktion zunächst informell, dann formal als Tupel, und beweisen Sie dann die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

3. Modifizieren Sie die Potenzmengenkonstruktion geeignet, so dass man damit einen $\forall$-NFA in einen äquivalenten DFA umwandeln kann.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Wenn L regulär ist und $L' \subseteq L$ gilt, ist dann auch L' regulär?
2. Ist die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n + m \text{ gerade}\}$ regulär? Läßt sich das mit dem Pumping-Lemma zeigen?

Vorbereitung 2

In einem Tresor liegt eine Liste mit 6-stelligen TAN-Nummern. Der Schlüssel zum Öffnen des Tresors ist verloren gegangen und es gibt keine andere Möglichkeit, den Tresor zu öffnen.

Sei A die Menge der Primzahlen, die auf der TAN-Liste vorkommen.

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar? Begründung!

Vorbereitung 3

1. Seien A, B und X Sprachen über Σ mit $\epsilon \notin A$. Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung von Arden's Lemma, d.h. $X = A^*B \Longrightarrow X = AX \cup B$.
2. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $\epsilon \notin A$. Dann ist die Lösung X der Gleichung $X = AX \cup B$ eine reguläre Menge.

Tutoraufgabe 1 (Entscheidungsverfahren bei Automaten)

Finden Sie ein Verfahren, welches für einen gegebenen NFA M entscheidet, ob $|L(M)| \leq 100$ gilt.

Tutoraufgabe 2 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^{2i}cd^i e \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.
2. Sei $\Sigma = \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist.

Tutoraufgabe 3 (Angabe bzw. Konstruktion regulärer Ausdrücke)

1. Sei $L_1 = \{a^m b^n \mid (m + n) \bmod 2 = 1\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, so dass $L_1 = L(\alpha)$ gilt.
2. Wir betrachten den DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$, dessen Zustandsübergangsfunktion δ gegeben ist durch

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1
q_2	q_1	q_0

   Stellen Sie zur Berechnung der Sprachen $L_i = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in \{q_1, q_2\}\}$ ein Gleichungssystem mit entsprechenden Unbekannten X_i für die Sprachen L_i auf und berechnen Sie mit Hilfe von Ardens Lemma alle X_i als reguläre Ausdrücke.