Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 11
1. Juli 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 8. Juli, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Die folgende Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ ist nicht vom Typ 2, d.h., sie ist nicht kontextfrei:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N},\, 0 < i < j < k\}\,.$$

1. Stellen Sie L als Durchschnitt kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 dar.

   Zeigen Sie die Kontextfreiheit für die von Ihnen gewählten Sprachen L_1 und L_2.

2. Geben Sie eine Typ 1 Grammatik G an, die L erzeugt.

Hinweis: In Typ 1 Grammatiken gilt für jede Produktion $\alpha \to \beta$ die Monotonieeigenschaft $|\alpha| \leq |\beta|$. Sie werden deshalb auch „monotone“ Grammatiken genannt. Monotone Grammatiken haben zunächst den Vorteil, dass man mit Produktionen $AB \to BA$ Zeichen in eine Richtung sortieren kann. Solche Produktionen kann man dann durch eine Kette von „kontextsensitiven“ monotonen Produktionen $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$ simulieren.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $P(k, \overline{x})$ ein primitiv rekursives $(n+1)$-stelliges Prädikat, wobei $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Abkürzung sei für die letzten n Stellen und $n = 0$ den einstelligen Fall $P(k)$ bedeute. In den Beweisen dürfen erweiterte Komposition und erweiterte Schemata benützt werden.

1. Sei $\max \emptyset = 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $q(m, \overline{x})$ primitiv rekursiv ist.

   $$q(m, \overline{x}) = \max\{k \mid k \leq m \,\wedge\, P(k, \overline{x})\}\,.$$

   Die entsprechende Aussage aus der Vorlesung ist zum Beweis nicht verwendbar. Begründen Sie diesen Sachverhalt!

2. Zeigen Sie, dass der folgende beschränkte Existenzquantor primitiv rekursiv ist.

   $$Q(m, \overline{x}) := \exists k \leq m.\, P(k, \overline{x})\,.$$

   Hinweis: Es ist von Vorteil, zunächst im Fall $\hat{P}(0, \overline{x}) = 0$ für alle $m \geq 0$ die folgende Gleichung zu beweisen:

   $$\hat{Q}(m, \overline{x}) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} q(m, \overline{x}))\,.$$

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Ganzzahlige Division $Div(m, n)$ von natürlichen Zahlen m und n ist definiert durch

$$Div(m, 0) = 0 \quad \text{und} \quad Div(m, n) = \max\{k \mid k \cdot n \leq m\} \quad \text{für} \quad n \neq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $Div(m, n)$ primitiv rekursiv ist.

<u>Hinweis</u>: Verwerten Sie die Erkenntnisse aus Hausaufgabe 2 und definieren Sie ein Prädikat $P(k, m, n) := (k \cdot n \leq m) \wedge (n \neq 0)$. Beweisen Sie zunächst, dass $P(k, m, n)$ primitiv rekursiv ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die für alle $n \geq 3$ der linearen Rekursion $f(n) = f(n-1) + f(n-3)$ genügt. Außerdem gelte $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.
2. Sei W_f der Wertebereich von f, d. h. $W_f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass W_f entscheidbar ist.
3. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Umkehrfunktion von f auf dem Wertebereich W_f von f, d. h., dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = g(f(n))$ und für $y \notin W_f$ gilt, dass $g(y)$ nicht definiert ist. Zeigen Sie, dass g WHILE-berechenbar ist.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir bezeichnen mit TM_k solche Einband-Turingmaschinen, die jede Zelle des Bandes höchstens k-mal ändern dürfen. Dabei gelten nur Übergänge $\delta(q, x) = (q', y, X)$ mit $x \neq y$ als Änderungen einer Zelle des Bandes (mit $X \in \{N, R, L\}$).

1. Zeigen Sie, dass die Turingmaschinen TM_2 äquivalent zu herkömmlichen Turingmaschinen sind. Benutzen Sie soviel Band wie nötig.
2. Zeigen Sie, dass auch die Turingmaschinen TM_1 äquivalent zu herkömmlichen Turingmaschinen sind. Sie dürfen dabei die Resultate der ersten Teilaufgabe verwenden.

Sie müssen keine expliziten Konstruktionen angeben. Es genügen informelle, aber dennoch vollständige und genaue Beschreibungen.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $A = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w = \Omega\}$.
2. $B = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(101) \neq \bot\}$.

Vorbereitung 2

1. Wir betrachten das Postsche Korrespondenzproblem $P = (\,(1, c1), (abc, ab)\,)$.
   Bestimmen Sie alle Lösungen von P!
2. Sei $P = (p_1, p_2)$ ein Postsches Korrespondenzproblem über einem beliebigen Alphabet Σ mit $p_i = (x_i, y_i)$ und $|\,|x_i| - |y_i|\,| = 1$ für $i = 1, 2$.
   Zeigen Sie, dass P entscheidbar ist!

Tutoraufgabe 1

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

   (i) $L_a = L_1 \cup L_2$ (i) $L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}$

2. Seien $L_n \subseteq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass dann

$$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

   abzählbar, aber nicht notwendigerweise rekursiv aufzählbar ist.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $C = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(\epsilon) = w\}$.
2. $D = \{(u, v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid L(M_w) \text{ ist kontextfrei}\}$ ist unentscheidbar.

2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = 3n + 5\}$ ist unentscheidbar.

Warum kann man den Satz von Rice auf die folgende Menge nicht anwenden?

3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = \bot \text{ und } w \text{ ist ein Palindrom}\}$.

Tutoraufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Postschen Korrespondenzproblems

$$P_1 = \{(a, aaa), (abaaa, ab), (ab, b)\}$$