# Übung 7: CYK und Kellerautomaten

**Theoretische Informatik Sommersemester 2013**

Markus Kaiser

July 11, 2013

## Definition (Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus)

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in Chomsky-Normalform in $\mathcal{O}(n^3)$.
Gegeben eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in CNF und ein Wort $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$. Mit

$$V_{ij} := \left\{A \in V \mid A \rightarrow_G^* a_i \ldots a_j\right\}$$

ist

$$w \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{1n}$$

$$V_{ii} = \{A \in V \mid (A \rightarrow a_i) \in P\}$$

$$V_{ij} = \left\{A \in V \mid \exists k, B \in V_{ik}, C \in V_{k+1,j} \,.\, (A \rightarrow BC) \in P\right\}$$

## Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den $V_{ii}$.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| 3 | | | | |
| 2 | | | | |
| 1 | | | | |
| | b | a | a | a |

## Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den $V_{ii}$.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| 3 | | | | |
| 2 | | | | |
| 1 | $B$ | $A, C$ | $A, C$ | $A, C$ |
| | b | a | a | a |

## Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den $V_{ii}$.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| 3 | | | | |
| 2 | $A$ | $B$ | $B$ | |
| 1 | $B$ | $A, C$ | $A, C$ | $A, C$ |
| | b | a | a | a |

## Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den $V_{ii}$.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| 3 | $\emptyset$ | $S, A, C$ | | |
| 2 | $A$ | $B$ | $B$ | |
| 1 | $B$ | $A, C$ | $A, C$ | $A, C$ |
| | b | a | a | a |

## Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den $V_{ii}$.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $S, \dots$ | | | |
| 3 | $\emptyset$ | $S, A, C$ | | |
| 2 | $A$ | $B$ | $B$ | |
| 1 | $B$ | $A, C$ | $A, C$ | $A, C$ |
| | b | a | a | a |

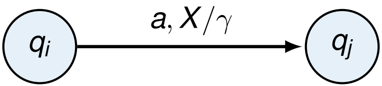
# Kellerautomaten



## Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel
$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- endlichen Menge von Zuständen $Q$
- endlichen Eingabealphabet $\Sigma$
- endlichen Kelleralphabet $\Gamma$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Kellerinitialisierung $Z_0 \in \Gamma$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$



## Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel
$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

## Definition (Akzeptanz)

Ein PDA $P$ akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$\exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.(q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (f, \epsilon, \gamma)$$

Ein PDA $P$ akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leerem Keller gdw

$$\exists q \in Q.(q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

## Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel
$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

## Beispiel

PDA akzeptierend mit leerem Keller zu $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.