

Übung 11: Aussagen über TMs und PCP

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 11, 2013

Definition (Spezielles Halteproblem)

Gegeben ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$.

Hält M_w bei Eingabe w ?

$$K := \{w \mid M_w[w] \downarrow\}$$

Satz

Das spezielle Halteproblem ist *nicht entscheidbar*.

- Hält eine Turingmaschine mit sich selbst als Eingabe?
- w ist die Gödelisierung von M_w .
- K ist semi-entscheidbar, \bar{K} nicht.

Definition (Allgemeines Halteproblem)

Gegeben **Wörter** $w, x \in \{0, 1\}^*$.

Hält M_w bei Eingabe x ?

$$H := \{w\#x \mid M_w[x] \downarrow\}$$

Satz

*Das allgemeine Halteproblem ist **nicht entscheidbar**.*

- Es ist $K \leq H$. Warum?

Definition (Rekursiv aufzählbar)

Eine Menge A heißt **rekursiv aufzählbar** wenn $A = \emptyset$ oder es eine **berechenbare** totale Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}$$

Äquivalent:

- A rekursiv aufzählbar
- A semi-entscheidbar, also χ'_A berechenbar
- $A = L(M)$ für eine TM M
- A ist Bild oder Urbild einer berechenbaren Funktion

Satz (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Sei weder $F = \emptyset$ noch $F = \text{alle ber. Funktionen}$ (F nicht trivial).
Dann ist **unentscheidbar**, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion in F ist, also ob $\varphi_w \in F$.

- Nicht-triviale **semantische** Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.
- **Termination** ist unentscheidbar.

Rice-Shapiro:

- Termination ist nicht semi-entscheidbar.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar.

Definition (Postisches Korrespondenzproblem)

Gegeben **endliche Folge** $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$.
 Gibt es eine **Folge von Indizes** $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ mit

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_n} = y_{i_1}, \dots, y_{i_n}$$

x_i
y_i

001
00

10
11

1
01

1

2

3

Satz

Das PCP ist **unentscheidbar**, aber semi-entscheidbar.

Idee

Mögliche Lösungen aufzählen, richtige Lösungen identifizieren

$$\frac{x_i}{y_i}$$

$$\frac{001}{00}$$

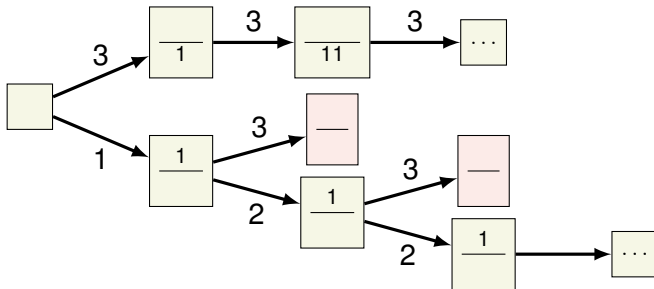
$$\frac{01}{10}$$

$$\frac{1}{11}$$

1

2

3



$$L = \{(12^*3)^+\}$$