

Übung 5: CNF und CFL-Pumping Lemma

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

June 4, 2013

Definition (Chomsky-Normalform)

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky-Normalform** (CNF) genau dann wenn alle Produktionen die Form

$$A \rightarrow a \quad \text{oder} \quad A \rightarrow BC$$

haben.

Satz

Zu *jeder* CFG G existiert eine CFG G' in Chomsky-Normalform mit

$$L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$$

Idee

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 **Eliminiere ϵ -Produktionen**
- 2 **Eliminiere Kettenproduktionen**
- 3 **Ersetze Terminale** durch Nichtterminale
- 4 **Verkürze Ketten** von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Idee

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 **Eliminiere ϵ -Produktionen**
- 2 **Eliminiere Kettenproduktionen**
- 3 **Ersetze Terminale durch Nichtterminale**
- 4 **Verkürze Ketten** von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Sind $B \rightarrow \epsilon$ und $A \rightarrow \alpha B \beta$ in P , dann füge $A \rightarrow \alpha \beta$ hinzu.
Entferne danach alle ϵ -Produktionen.

$$S \rightarrow Ab, \quad A \rightarrow aAA \mid \epsilon$$

neu:

$$S \rightarrow b$$
$$A \rightarrow aA \mid a$$

Idee

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Eliminiere ϵ -Produktionen
- 2 Eliminiere Kettenproduktionen
- 3 Ersetze Terminale durch Nichtterminale
- 4 Verkürze Ketten von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Sind $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \alpha$ in P , dann füge $A \rightarrow \alpha$ hinzu. Entferne danach alle Kettenproduktionen und unerreichbaren Symbole.

$$S \rightarrow A, \quad A \rightarrow a \mid B, \quad B \rightarrow bS$$

neu:

$$A \rightarrow a \mid bS$$

$$S \rightarrow a \mid bS$$

Idee

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Eliminiere ϵ -Produktionen
- 2 Eliminiere Kettenproduktionen
- 3 Ersetze Terminale durch Nichtterminale
- 4 Verkürze Ketten von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Ersetze jedes $a \in \Sigma$ in einer rechten Seite länger als 1 durch ein neues Nichtterminal.

$$S \rightarrow aa \mid Bb \mid b, \quad B \rightarrow \dots$$

neu:

$$S \rightarrow X_a X_a \mid B X_b \mid b$$
$$X_a \rightarrow a, \quad X_b \rightarrow b$$

Idee

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 **Eliminiere ϵ -Produktionen**
- 2 **Eliminiere Kettenproduktionen**
- 3 **Ersetze Terminale** durch Nichtterminale
- 4 **Verkürze Ketten** von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Ersetze jede Produktion der Form $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_k$ durch neue Nichtterminale mit Produktionen der Länge 2.

$$S \rightarrow X_a X_b B X_a, \quad X_a \rightarrow a, \quad X_b \rightarrow b, \quad B \rightarrow \dots$$

neu:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X_a T_1 \\ T_1 &\rightarrow X_b T_2, \quad T_2 \rightarrow B X_a \end{aligned}$$

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist

nützlich es gibt $S \xrightarrow{*}_G w \in \Sigma^*$ in der X **vorkommt**

erzeugend es gibt $X \xrightarrow{*}_G w \in \Sigma^*$

erreichbar es gibt $S \xrightarrow{*}_G \alpha X \beta$

Satz

*Nützliche Symbole **sind** erzeugend und erreichbar. Aber **nicht** notwendigerweise umgekehrt.*

$$S \rightarrow AB \mid a, \quad A \rightarrow b$$

Satz (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvwxy$ zerlegen lässt, dass

- $vx \neq \epsilon$
- $|vwx| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^iwx^iy \in L$

