Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 4
6. Mai 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 13. Mai, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Zu jedem ϵ-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gibt es einen äquivalenten (ϵ-freien) NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, so dass $|Q'| \leq |Q|$ gilt.
2. Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gilt: Wenn $F = Q$, dann ist $L(N) = \Sigma^*$.
3. $a(ab)^*(ba)^*b \equiv a(ab|ba)^*b$.
4. Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist und $\Gamma \subseteq \Sigma$, dann ist $L' = \{w \in L \mid w \text{ enthält nur Zeichen aus } \Gamma\}$ ebenfalls regulär.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Die Zustandsübergangsfunktion eines NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0, q_3\})$ sei gegeben durch

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$

1. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen DFA B, der $L(A)$ akzeptiert.
2. Geben Sie nun einen DFA C an, der $\overline{L(A)} = \Sigma^* \setminus L(A)$ akzeptiert und lesen Sie an C einen regulären Ausdruck ab für $\overline{L(A)}$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Für zwei Sprachen L_1 und L_2 über einem Alphabet Σ definieren wir die Linksquotientensprache $L_1/L_2 = \{v \mid uv \in L_1 \wedge u \in L_2\}$. Zeigen Sie: Ist L_1 regulär, so ist auch L_1/L_2 regulär.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Die Dropin-Wörter zu einem Wort $w \in \Sigma^*$ sind alle Wörter, die durch das Hinzufügen genau eines Buchstabens aus Σ an beliebiger Stelle in w entstehen. Für eine Sprache L nennen wir die Sprache L_D, die aus den Dropin-Wörtern der Wörter aus L besteht, Dropin-Sprache. Formal schreiben wir: $L_D = \{uav \mid uv \in L, a \in \Sigma\}$.

1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Dropin-Sprache zu $(ab)^*$ an.

2. Zeigen Sie, dass L_D regulär ist für jede reguläre Sprache L.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

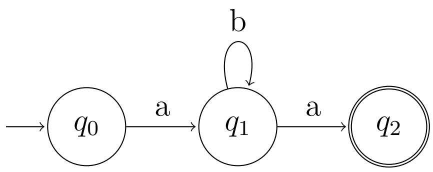
Für ein Alphabet Σ und eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die Sprache

$$E(L) = \{x_1x_3 \dots x_{2n-1} \mid x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in \Sigma \wedge x_1x_2 \dots x_{2n} \in L\}$$

Damit ist $E(L)$ die Sprache aller Wörter, die dadurch entstehen, dass man bei einem Wort aus L geradzahliger Länge jedes zweite Zeichen entfernt.

1. Geben Sie reguläre Ausdrücke an für $E(L((ab)^*))$, $E(L((aba)^*))$.

2. Gegeben sei folgender NFA N:



   Geben Sie einen endlichen Automaten (DFA, NFA oder ϵ-NFA) an, der $E(L(N))$ akzeptiert.

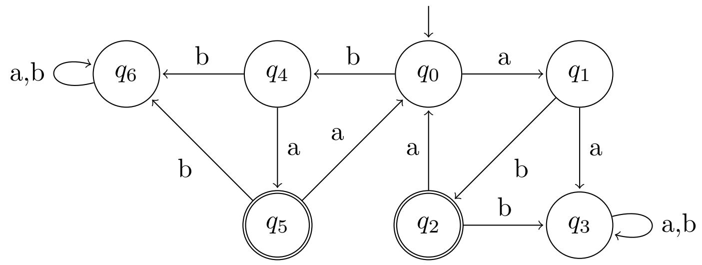
3. Zeigen Sie allgemein: Wenn L regulär ist, dann ist auch $E(L)$ regulär.

   Hinweis, falls Sie eine Automatenkonstruktion verwenden: Beschreiben Sie Ihre Konstruktionsidee zunächst informell und geben Sie danach den Automaten formal als 5-Tupel an.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Der Automat M sei durch das folgende Diagramm gegeben. Zeigen Sie $q_3 \not\equiv_M q_4$ und $q_3 \equiv_M q_6$.



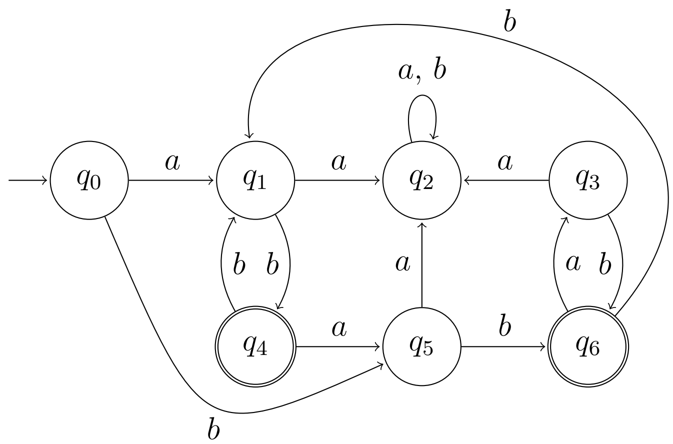
Tutoraufgabe 1

Sei $R = L(a^*b^*)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzbeziehungen:

$$aa \equiv_R \epsilon\,, \qquad ab \equiv_R aa\,, \qquad aba \equiv_R abba\,, \qquad aba \equiv_R \epsilon\,.$$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten den folgenden deterministischen Automat mit Alphabet $\{a, b\}$.



Verwenden Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren, um diesen Automat zu minimieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Tabelle aus der Vorlesung auf und geben Sie zu jedem unterscheidbaren Paar von Zuständen an, mit welchem Zeichen (oder ϵ) sie unterschieden werden können.

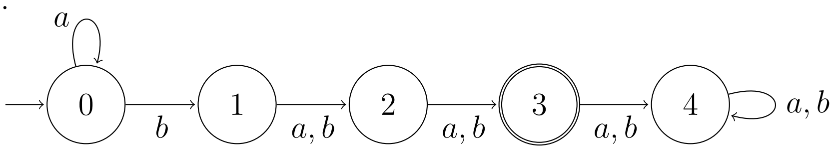
2. Verwenden Sie die aufgestellte Tabelle, um den Quotientenautomat zu konstruieren.

Tutoraufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq 0$ einen deterministischen endlichen Automat (d. h. DFA) $A_k = (Q_k, \Sigma, \delta_k, 0, \{k\})$ mit $k + 2$ Zuständen aus $Q_k = \{0, 1, \ldots, k, k + 1\} \subset \mathbb{N}$. δ_k sei für alle Zustände q mit $1 \leq q \leq k$ und $x \in \Sigma$ definiert durch

$$\delta_k(0, a) = 0, \quad \delta_k(0, b) = 1, \quad \delta_k(q, x) = q + 1, \quad \delta_k(k + 1, x) = k + 1\,,$$

z. B. für $k = 3$:



1. Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ kann man die gespiegelte Sprache $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ betrachten, wobei $(a_1 a_2 \ldots a_n)^R = a_n \ldots a_2 a_1$ gilt für beliebige $a_i \in \Sigma$.

   Geben Sie für die gespiegelte Sprache $L(A_3)^R$ einen DFA mit 5 Zuständen an.

2. Zeigen Sie für alle $k \geq 1$, dass der DFA A_k minimal ist für die Sprache $L(A_k)$.

   Hinweis: Zustände i, j mit $i < j$ sind unterscheidbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(i, w)$ ein Endzustand ist und gleichzeitig $\hat{\delta}(j, w)$ kein Endzustand ist.

3. Wir betrachten die folgende Aussage: Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass die kanonischen (deterministischen) Minimalautomaten für L bzw. für die gespiegelte Sprache L^R nicht die gleiche Anzahl von Zuständen besitzen!

   Begründen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass diese Aussage wahr ist.