
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: Dienstag, den 11. Juni, 13 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Σ eine nicht leere Zeichenmenge.

1. Sei L die Menge aller Wörter über Σ mit geradzahlgiger Länge. Geben Sie ein Verfahren an, das für einen beliebigen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidet, ob jedes (oder nicht jedes) von A akzeptierte Wort eine ungerade Länge besitzt.
2. Sei $E(x)$ ein Eigenschaft für Wörter x über Σ , so dass $K = \{x \mid E(x)\}$ eine reguläre Sprache ist. Verallgemeinern Sie Ihr obiges Verfahren so, dass es für einen beliebigen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidet, ob jedes (oder nicht jedes) von A akzeptierte Wort x die Eigenschaft E besitzt.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $L = L(a^*b^*c^*) \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Zeigen Sie, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik G für diese Sprache angeben. Ein Beweis, dass $L(G) = L$ ist, wird nicht erwartet.
2. Geben Sie je eine G -Ableitung für die Wörter $abbcc$ und $abccc$ an.

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Sei L kontextfrei und $\text{Fragment}(L)$ die Sprache aller Fragmente der Wörter aus L , wobei ein Fragment durch Weglassen beliebiger Teile eines Wortes entsteht. Ist diese Sprache kontextfrei? Begründung!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. $\#_a(w)$ bedeutet die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a im Wort w .

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an mit

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_0(w) > \#_1(w)\}.$$

2. Zeigen Sie für Ihre Grammatik G und alle $w \in L(G)$ die Ungleichung $\#_0(w) > \#_1(w)$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei G die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \mid aTbS \mid SaTb, \\ T &\rightarrow aTb \mid \epsilon. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist.
2. Zeigen Sie, dass $b^3a^3 \notin L(G)$ gilt.

Zusatzaufgabe 3 (Für Interessierte, ohne Abgabe)

Wir betrachten Grammatiken, bei denen jede Produktion die Form $A \rightarrow aB$ oder $A \rightarrow Ba$ oder $A \rightarrow \epsilon$ für ein Terminal a und Nichtterminale A, B hat. Diese Grammatiken beschreiben die L-Sprachen. Offensichtlich gilt „regulär \subseteq L-Sprachen \subseteq kontextfrei“.

1. Entscheiden Sie: Gilt entweder „regulär \subset L-Sprachen“ oder „regulär = L-Sprachen“? Beweisen Sie!
2. Entscheiden und begründen Sie: Gilt „L-Sprachen = kontextfrei“?

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.

Vorbereitung 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Finden Sie einen Algorithmus um die Menge $E = \{N \in V \mid N \rightarrow^* \epsilon\}$ zu berechnen und begründen Sie seine Korrektheit.

Vorbereitung 2

Ist das Wortproblem für ein Wort der Länge n und eine kontextfreie Grammatik in der Zeit $O(n^4)$ entscheidbar? Begründung!

Vorbereitung 3

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q, \epsilon, Z_0) &= \{(q, XZ)\}, & \delta(q, a, X) &= \{(q, XY)\}, \\ \delta(q, \#, X) &= \{(q, \epsilon)\}, & \delta(q, b, Y) &= \{(q, \epsilon)\}, \\ \delta(q, a, Z) &= \{(q, \epsilon)\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ' , dass für den Kellerautomaten $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$ gilt: $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die kontextfreie Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen in Chomsky-Normalform

$$\begin{aligned} S &\rightarrow YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA, \\ X &\rightarrow ZC_2 \mid ZB \mid BZ \mid BB, \\ Y &\rightarrow AC_1 \mid AY \mid AA, \\ C_1 &\rightarrow YZ \mid AZ, \\ C_2 &\rightarrow BZ, \\ Z &\rightarrow YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA, \\ C_3 &\rightarrow XZ \mid YZ \mid BZ \mid AZ, \\ A &\rightarrow a, \\ B &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob die Wörter $aabaa$ und $abab$ in der Sprache $L(G)$ enthalten sind! Geben Sie gegebenenfalls Ableitungen an!

Tutoraufgabe 2

1. Geben Sie einen Kellerautomat an, der die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit leerem Keller akzeptiert. Geben Sie die Konfigurationsfolge an, die der Automat durchläuft, wenn er das Wort $a^3 b^3$ liest.

2. Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$S \rightarrow aAB,$$

$$A \rightarrow Sa \mid Sb \mid a,$$

$$B \rightarrow Bb \mid Sb \mid b.$$

Konstruieren Sie systematisch einen PDA K , der $L(G)$ durch leeren Keller akzeptiert.