Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 2
22. April 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 29. April, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien Σ ein Alphabet und $A \subseteq \Sigma^*$ mit $|A| = n \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$|A \times (A \cup \emptyset^*)^2| \leq n^3 + n^2 + n\,.$$

Geben Sie eine nicht leere Menge A an, für die $|A \times (A \cup \emptyset^*)^2| = n^3 + n^2 + n$ gilt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie durch Induktion über die Wortlänge für alle $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $|u| \geq |v|$:

$$uv = vw \implies \exists x, y \in \Sigma^*.\ u = vx \wedge w = yv\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie sich bijektiv auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen abbilden (d. h. „nummerieren“) läßt. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.
Wir nummerieren die Buchstaben $x \in \Sigma$ alphabetisch von 1 bis 3, die Nummern bezeichnen wir als $z(x)$. Dann kann man jedem Wort $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ die folgende natürliche Zahl $f(w)$ zuordnen.

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} z(x_i) \cdot 3^{i-1}\,.$$

Dem leeren Wort ϵ wird die Zahl 0 zugeordnet.

1. Listen Sie die ersten 20 Wörter aus Σ^* im Sinne der Nummerierung f auf.
2. Zeigen Sie, dass f injektiv ist und mit Aufwand $O(|w|)$ für $w \in \Sigma^*$ berechnet werden kann.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Wiederholen Sie die explizite prädikatenlogische Definition der Landausymbole und zeigen Sie für die Funktionen $h, h^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $h(n) = n^{(-1)^n}$ und $h^+(n) = h(n+1)$:
$$h^+(n) \notin O(h(n))\,.$$
2. Zeigen Sie, dass gilt: $\sqrt{n} \in \Omega\left(\ln(n^{\ln n})\right)$.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Studieren Sie die Definition des Begriffs des regulären Ausdrucks und beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Geben sie einen regulären Ausdruck an, der eine Sprache A über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit den Eigenschaften $01 \in A$ und $A^*A = A$ darstellt.
2. Finden Sie einen regulären Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der die Menge aller Wörter beschreibt, die mit 00 beginnen und in denen 1 genau dreimal vorkommt.
3. Wann genau ist die von einem endlichen Automat erzeugte Sprache endlich?

Tutoraufgabe 1 (Semantik regulärer Ausdrücke)

Beweisen Sie für reguläre Ausdrücke α und β: $(\alpha\beta)^*\alpha \equiv \alpha(\beta\alpha)^*$.

Tutoraufgabe 2 (Äquivalente Darstellungen regulärer Sprachen)

Wir betrachten den regulären Ausdruck $\alpha = (1(0|1)^*)|0$.

1. Konstruieren Sie mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung einen ϵ-NFA A, so dass $L(\alpha) = L(A)$ gilt.
2. Wandeln Sie den erhaltenen Automat in einen äquivalenten NFA ohne ϵ-Übergänge.
3. Konstruieren Sie durch Anwendung des Potenzmengenverfahrens einen DFA, der die Sprache des Ausdrucks α akzeptiert.

Tutoraufgabe 3 (Produkte von Automaten)

Das sogenannte Shuffle-Produkt spielt in der Theorie der nebenläufigen Systeme eine wichtige Rolle. Für zwei Sprachen L_1 und L_2 bezeichnet $L_1 \parallel L_2$ die Menge der Wörter, die man erhält, indem man zwei Wörter $v \in L_1$ und $w \in L_2$ beliebig miteinander verschränkt. Dabei können sich Teile aus v und w beliebig abwechseln, wobei die Reihenfolge der Zeichen aus v und w jedoch erhalten bleibt. Das kann man sich gut als das Ineinanderschieben zweier Kartenstapel veranschaulichen. Formal definieren wir $L_1 \parallel L_2$ wie folgt:

$$L_1 \parallel L_2 = \{v_1w_1v_2w_2 \cdots v_nw_n \mid v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*, \\ v_1v_2 \cdots v_n \in L_1 \text{ und } w_1w_2 \cdots w_n \in L_2\}$$

1. Versuchen Sie, eine einfache Beschreibung von $L((01)^*) \parallel L((10)^*)$ zu finden.
2. Begründen Sie: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \| L_2$ regulär. Hinweis: Konstruieren Sie einen NFA für $L_1 \parallel L_2$.
3. Führen Sie die Konstruktion konkret für die Sprachen $L((01)^*)$ und $L((10)^*)$ durch und geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.