Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 13
15. Juli 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: Freitag, 19. Juli, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Das PCP $((01, 0), (10, 01), (0, 01))$ besitzt eine Lösung.

2. Wenn f berechenbar ist, dann ist $A_f := \{w \in \Sigma^* \mid f(w) \neq \perp\}$ semi-entscheidbar.

3. Für das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w] \downarrow\}$ und eine beliebige Sprache A gilt: Wenn $K \cap A$ entscheidbar ist, dann ist A endlich.

4. Jedes Problem ist entweder in P oder in NP.

5. Das Postsche Korrespondenzproblem ist semi-entscheidbar.

6. Für jede Turingmaschine M ist die Funktion

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M \text{ auf allen Eingaben hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   berechenbar.

7. Wenn f und g primitiv rekursiv sind, und $f(x) = g(h(x))$ für alle x gilt, dann ist auch h primitiv rekursiv.

8. Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Wenn χ_A total ist, dann ist A entscheidbar.

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(0) = 0\}$.

2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(w) = w\}$.

3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_0(0) = w\}$.

Hausaufgabe 3 (2 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Eine Sprache ist genau dann vom Typ 0, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.
2. Das folgende Problem ist entscheidbar:

   Gegeben: Eine deterministische Turingmaschine M.

   Problem: Schreibt M mit leerer Eingabe jemals ein nicht-$\Box$ Symbol auf das Band?
3. Wenn eine Turingmaschine M bei einer Eingabe w das Band nie verändert, dann sagen wir, dass M ohne Speicherung arbeitet und schreiben dafür $OS(M, w)$. Wir definieren $OS = \{(v, w) \mid OS(M_v, w)\}$.

   Dann ist OS entscheidbar.
4. Die folgende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar:

$$f(x) = \begin{cases} 1 : P = NP \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$$

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Jedes Problem ist entweder in P oder in NP.
2. Wenn A NP-vollständig ist, dann ist χ_A μ-rekursiv.
3. Das Halteproblem auf leerem Band H_0 ist NP-hart.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die natürlichen Zahlen zusammen mit der Multiplikation $x \cdot y$ und der eingeschränkten Subtraktion $neg(x) = 1 \dot{-} x$ für $x, y \in \mathbb{N}$ (Man beachte: $0 \in \mathbb{N}$, $neg(2) = 0$).

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller arithmetischen Formeln über beliebigen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ und den Operationen „$\cdot$“ und „neg“. Sei $\sigma(F)$ der in üblicher Weise berechnete arithmetische Wert einer Formel $F \in \mathcal{F}$ bei vorgelegter Belegung σ aller Variablen x_i mit natürlichen Zahlen. (Beispiel: $\sigma(x_1) = 0$, $\sigma(x_2) = 3 \implies \sigma(x_2 \cdot neg(x_1)) = 3$.)

Wir betrachten das Problem NichtNull:

Gegeben: $F \in \mathcal{F}$.

Problem: Gibt es eine Belegung der Variablen mit natürlichen Zahlen, so dass F einen Wert $\neq 0$ annimmt?

1. Zeigen Sie, dass NichtNull in NP liegt.
2. Zeigen Sie, dass NichtNull NP-hart ist.

Hinweis: Nutzen Sie die enge Verbindung zum SAT-Problem.

Hausaufgabe 6 (4 Punkte)

1. Gegeben sei die Boolesche Klausel $x_1 \vee \bar{x_2} \vee x_3$. Ferner seien $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\}$, so dass für $i = 1, 2, 3$ gilt:

$$x_i = \text{true} \Longleftrightarrow z_i = 1 \quad (\text{und entsprechend } x_i = \text{false} \Longleftrightarrow z_i = 0)\,.$$

   Geben Sie eine lineare Ungleichung $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 \geq b$ für geeignete Zahlen a_1, a_2, a_3, b an, die genau dann erfüllt ist, wenn die Boolesche Klausel den Wert true besitzt.

2. Wir definieren das Problem Zero-One Linear Inequalities wie folgt:

   Eingabe: Variablen $z_1, \ldots, z_n$ sowie ein System von m linearen Ungleichungen. Die j-te Ungleichung habe die Form

$$a_{j_1}z_1 + \ldots + a_{j_n}z_n \geq b_j\,,$$

   wobei $a_{j_i}z_i$ und b_j ganzzahlig seien für beliebige Werte i, j.

   Ausgabe: YES, wenn das Ungleichungssystem eine Lösung besitzt, so dass $z_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$, d. h. es werden nur Lösungen zugelassen, bei denen die Variablen die Werte 0 oder 1 annehmen; NO sonst.

   Beweisen Sie, dass das Problem Zero-One Linear Inequalities in NP liegt.

3. Beweisen Sie, dass das Problem Zero-One Linear Inequalities NP-vollständig ist.

Zusatzaufgabe 5 (ohne Punkte)

Sei *IF* die Menge aller aussagenlogischen Formeln, die ausschließlich mit den Konstanten 0 und 1, logischen Variablen x_i mit $i \in \mathbb{N}$ und der Implikation $\rightarrow$ als Operationszeichen aufgebaut sind, wobei natürlich auch Klammern zugelassen sind. Beachten Sie, dass $x_i \rightarrow x_j$ die gleiche Wahrheitstafel wie $(\neg x_i) \vee x_j$ hat.

Wir betrachten das Problem *ISAT*:

Gegeben: $F \in IF$

Problem: Ist F erfüllbar, d.h., gibt es eine Belegung der Variablen mit Konstanten 0 oder 1, so dass F den Wert 1 annimmt?

Zeigen Sie: *ISAT* ist NP-vollständig. Sie dürfen dazu benutzen, dass das *SAT*-Problem NP-vollständig ist.