

# Übung 3: Ardens- und Pumpinglemma

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

May 6, 2013

- Hausaufgaben
- Übungsniveau
- Links

## Satz

Die regulären Ausdrücke  $\mathfrak{R}$  über einem Alphabet  $\Sigma$  bilden mit Konkatenation  $\circ$  und Veroderung  $|$  einen **Halbring**  $\langle \mathfrak{R}, |, \circ, \emptyset, \epsilon \rangle$ .

- **Assoziative** Operationen
- Veroderung **kommutativ**
- **Distributivität**:  $\alpha(\beta | \gamma) \equiv \alpha\beta | \alpha\gamma$
- $\emptyset$  **neutral** bezüglich Oder
- $\epsilon$  **neutral** bezüglich Konkatenation

## Beispiel

$$1\psi | 0\phi | \psi \equiv 0\phi | (1 | \epsilon)\psi$$

## Satz (Ardens Lemma)

*Sind  $A$ ,  $B$  und  $X$  Sprachen mit  $\epsilon \notin A$ , dann gilt*

$$X = AB \cup X \implies X = A^*B$$

*Speziell gilt für reguläre Ausdrücke*

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \implies X \equiv \alpha^* \beta$$

## Beispiel

$$\psi \equiv 0\psi \mid (1 \mid \epsilon)\phi \implies \psi \equiv 0^*(1 \mid \epsilon)\phi$$

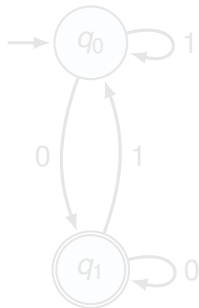
## Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach  $X_0$  mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1^*X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1^*(0X_1) \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1^*(0^*X_1) \mid 0X_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$



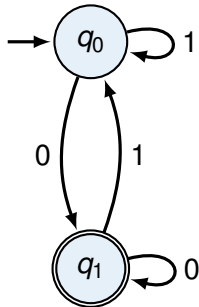
## Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach  $X_0$  mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$



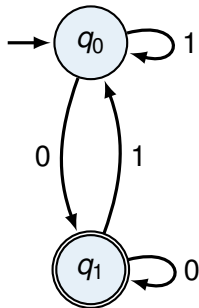
## Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach  $X_0$  mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$



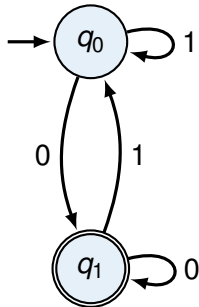
## Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach  $X_0$  mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$

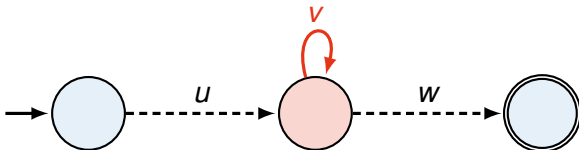




## Satz (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei  $R \subseteq \Sigma^*$  regulär. Dann gibt es ein  $n > 0$ , so dass sich **jedes**  $z \in R$  mit  $|z| \geq n$  so in  $z = uvw$  zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^i w \in R$



## Idee

Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \forall u, v, w. z = uvw$  **nicht** pumpbar

## Beispiel

Ist  $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$  regulär?

- 1 Sei  $n$  PL-Zahl
- 2 Wähle  $z = a^n b^n$
- 3 Dann ist  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ , hier:  $v = a^k$  mit  $k > 0$
- 4 Dann ist  $uv^0 w \notin L$
- 5 Damit ist  $L$  **nicht** regulär.

## Idee

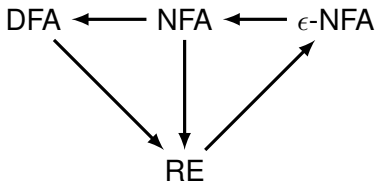
Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \forall u, v, w. z = uvw$  nicht pumpbar

## Beispiel

Ist  $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$  regulär?

- 1 Sei  $n$  PL-Zahl
- 2 Wähle  $z = a^n b^n$
- 3 Dann ist  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ , hier:  $v = a^k$  mit  $k > 0$
- 4 Dann ist  $uv^0 w \notin L$
- 5 Damit ist  $L$  nicht regulär.



## Satz

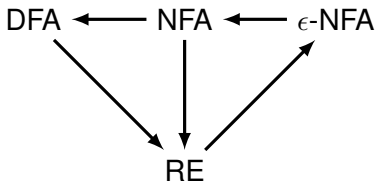
Für eine reguläre Sprache  $D$  ist *entscheidbar*:

Wortproblem Gegeben  $w$ , gilt  $w \in L(D)$ ?

Leerheitsproblem Ist  $L(D) = \emptyset$ ?

Endlichkeitsproblem Ist  $|L(D)| < \infty$ ?

Äquivalenzproblem Gilt  $L(D_1) = L(D_2)$ ?



## Satz

Für eine reguläre Sprache  $D$  ist **entscheidbar**:

**Wortproblem** Gegeben  $w$ , gilt  $w \in L(D)$ ?

**Leerheitsproblem** Ist  $L(D) = \emptyset$ ?

**Endlichkeitsproblem** Ist  $|L(D)| < \infty$ ?

**Äquivalenzproblem** Gilt  $L(D_1) = L(D_2)$ ?