Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

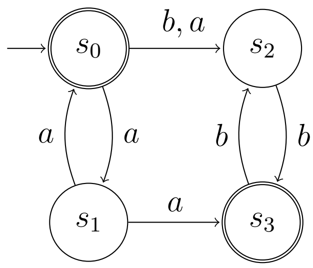
Sommersemester 2013
Übungsblatt 6
27. Mai 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 3. Juni, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat $A = (Q, \{a, b\}, \delta, s_0, F)$ sei durch den folgenden Graph gegeben.



1. Konstruieren Sie durch Anwendung des Potenzmengenverfahrens auf A einen zu A äquivalenten DFA B (mit 6 Zuständen).

2. Beweisen Sie durch Konstruktion des Quotientenautomaten, dass der zu A äquivalente minimale DFA C fünf Zustände besitzt.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Minimieren Sie den DFA $M = (\{A, \ldots, J\}, \{0, 1\}, \delta, A, \{E, F, I\})$ mit der folgenden Übergangsfunktion:

q	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
A	D	C
B	E	F
C	B	G
D	G	H
E	D	H
F	J	B
G	F	I
H	I	E
I	C	G
J	H	B

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer beliebigen rechts-linearen Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ liefert, so dass $L(G) = L(A)$ gilt.

2. Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer beliebigen rechts-linearen Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine links-lineare Grammatik G_R liefert, so dass $L(G)^R = L(G_R)$ gilt. Dabei bezeichnet $L(G)^R$ die zu $L(G)$ gespiegelte Sprache.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G(\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to aSc \mid cSb \mid a \mid b \ .$$

Zeigen Sie per Induktion über die induktive Sprachdefinition, dass ein $w \in L(S)$ nicht das Teilwort ba enthalten kann.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to aSb \mid SS \mid \epsilon\,, \\ T &\to TaTb \mid \epsilon\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.

2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.

3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.

4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Wie viele Nichtterminale muss eine CFG in Chomsky-Normalform mindestens haben, so dass sie genau alle Wörter der Länge 3 erzeugt?
2. Ist der Durchschnitt kontextfreier Sprachen stets kontextfrei?

Vorbereitung 2

1. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^k e^m f^n \mid k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.
2. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^m e^m f^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache L ein Durchschnitt kontextfreier Sprachen ist.

Tutoraufgabe 1 (CNF)

Wandeln Sie die durch folgende Produktionen gegebene Grammatik mit Startsymbol S in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{array}{rclrcl} S & \to & 0A0 \mid 1B1 \mid BB\,, & & & \\ A & \to & D\,, & B & \to & S \mid A\,, \\ C & \to & S \mid \epsilon\,, & D & \to & C\,. \end{array}$$

Tutoraufgabe 2 (Nützliche Symbole)

Welche Symbole einer durch die folgenden Produktionen gegebenen Grammatik sind erzeugend, welche erreichbar, und welche nützlich?

$$\begin{array}{rclrcl} S & \to & A \mid a\,, & & & \\ A & \to & BC\,, & B & \to & AE \mid C\,, \\ C & \to & aS\,, & D & \to & aB \mid FS \\ E & \to & EA\,, & F & \to & Ca \mid a\,. \end{array}$$

Tutoraufgabe 3 (Produktive Regeln)

Sei G eine kontextfreie Grammatik in CNF, die nur nützliche Symbole enthält. Man zeige: $L(G)$ ist genau dann unendlich, wenn G einen Zyklus enthält, d. h. ein Nichtterminal A, so dass $A \to_G^* \alpha A \beta$ gilt.

Tutoraufgabe 4 (Pumping-Lemma für CFL)

1. Zeigen Sie, dass $L = \{a^n b^m c^k \mid 0 < n < m < k\}$ keine kontextfreie Sprache ist.
2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion und es sei $L = \{a^n b^{f(n)} c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Beweisen Sie:

   Falls L kontextfrei ist, dann ist f beschränkt, d. h., dann gilt

   $$(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N})\,[f(n) \leq k]\,.$$