

Übung 5: Kontextfreie Sprachen

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 11, 2013

Definition (Kontextfreie Grammatik)

Eine **kontextfreie Grammatik** $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

V endlich viele **Nichtterminale** (Variablen)

Σ ein Alphabet von **Terminalen**

P endlich viele **Produktionen** $\subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$

S ein **Startsymbol**

Beispiel (Vorbereitung 3)

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Definition (Kontextfreie Grammatik)

Eine **kontextfreie Grammatik** $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

V endlich viele **Nichtterminale** (Variablen)

Σ ein Alphabet von **Terminalen**

P endlich viele **Produktionen** $\subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$

S ein **Startsymbol**

Beispiel (Vorbereitung 3)

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Definition (Ableitungsrelation)

Eine CFG G induziert eine **Ableitungsrelation** \rightarrow_G auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \beta$$

gdw es eine Regel $A \rightarrow \gamma$ in P mit Wörtern α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 A \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$$

Beispiel (Vorbereitung 3)

Mit den Produktionen $S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow_G 0S1 \rightarrow_G 00S11 \rightarrow_G 00S1111 \rightarrow_G 0011111 \\ \Rightarrow S &\rightarrow_G^* 0011111 \end{aligned}$$

Definition (Kontextfreie Sprache)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ **erzeugt** die Sprache

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **kontextfrei** gdw es eine kontextfreie Grammatik G gibt mit $L = L(G)$.

Induktive Sprachdefinition

Die **induktive Definition** (\implies) erzeugt Wörter **bottom-up**, setzt also kleine Wörter zu größeren zusammen.

Beispiel (Vorbereitung 3)

Mit den Produktionen $S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$:

$$\begin{aligned} & 1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \implies 0u1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \implies u11 \in L_G(S) \end{aligned}$$

Also z.B.:

$$1 \in L_G(S) \implies 010 \in L_G(S) \implies 01011 \in L_G(S)$$