Übung 10: μRekursion, Entscheidbarkeit

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 15, 2013

Definition (LOOP-Programm)

Syntax von LOOP-Programmen.
Es ist $X \in \{x_0, x_1, \ldots\}$ und $C \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P \to\ & X := X + C \\
&\mid X := X - C \\
&\mid P; P \\
&\mid \textbf{LOOP } X \textbf{ DO } P \textbf{ END} \\
&\mid \textbf{IF } X = 0 \textbf{ DO } P \textbf{ ELSE } Q \textbf{ END}
\end{aligned}
$$

- Ausgabe steht in x_0, Eingaben in $x_1, \ldots, x_n$, Rest ist 0.
- **LOOP** x_i **DO** P **END** führt P genau n mal aus, wobei n der Anfangswert von x_i ist. Zuweisungen an x_i in P ändern die Anzahl der Durchläufe nicht.

Definition (Erweitertes PR-Schema)

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion erlaubt

$$f(0, \bar{x}) = t_0$$
$$f(m+1, \bar{x}) = t$$

wobei

- t_0 enthält nur PR-Funktionen und die x_i
- t enthält nur $f(m, \bar{x})$, PR Funktionen, m und die x_i.

Satz

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus PR heraus.

Definition

Ein Prädikat P ist PR, wenn es eine PR Funktion $\hat{P}$ gibt mit

$$\hat{P}(x) = 1 \iff P(x)$$

Definition (Beschränkte Operationen)

Ist P PR, dann auch

- der beschränkte max-Operator

$$\max\{x \leq n \mid P(x)\}, \quad \max\{\emptyset\} = 0$$

- der beschränkte Existenzquantor

$$\exists x \leq n . P(x)$$

Definition (μ-Operator)

Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine Funktion.
Der μ-Operator definiert eine neue Funktion $\mu f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$:

$$(\mu f)(\bar{x}) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, \bar{x}) = 0\} & \text{falls } n \text{ existent}^* \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- *Für alle $m \leq n$ muss f definiert sein: $f(m, \bar{x}) \neq \perp$
- PR + μ = μ-Rekursion
- In Pseudocode:

$$\mu f(\bar{x}) = \mathit{find}(0, \bar{x})$$
$$\mathit{find}(n, \bar{x}) = \textbf{if } f(n, \bar{x}) = 0 \textbf{ then } n \textbf{ else } \mathit{find}(n+1, \bar{x})$$

Definition (Intuitive Berechenbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt intuitiv berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis $f(n_1, \dots, n_k)$ hält, falls $f(\dots)$ definiert ist,
- und nicht terminiert, falls $f(\dots)$ nicht definiert ist.

Churchsche These (nicht beweisbar)

Turing-Maschinen können genau alle intuitiv berechenbaren Funktionen berechnen.

Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt entscheidbar gdw ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt semi-entscheidbar gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \perp & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Reduzierbarkeit

Definition (Reduzierbarkeit)

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist reduzierbar auf eine Menge $B \subseteq \Gamma^*$ gdw es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt mit

$$\forall w \in \Sigma^*. w \in A \iff f(w) \in B$$

Wir schreiben dann $A \leq B$.

Intuition:

- B ist mindestens so schwer zu lösen wie A
- Ist A unlösbar, dann auch B.
- Ist B lösbar, dann erst recht A.