

Übung 3: Ardens- und Pumpinglemma

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

May 7, 2013

Satz

Die regulären Ausdrücke \mathfrak{R} über einem Alphabet Σ bilden mit Konkatenation \circ und Veroderung $|$ einen **Halbring** $\langle \mathfrak{R}, |, \circ, \emptyset, \epsilon \rangle$.

- **Assoziative** Operationen
- Veroderung **kommutativ**
- **Distributivität**: $\alpha(\beta | \gamma) \equiv \alpha\beta | \alpha\gamma$
- \emptyset **neutral** bezüglich Oder
- ϵ **neutral** bezüglich Konkatenation

Beispiel

$$1\psi | 0\phi | \psi \equiv 0\phi | (1 | \epsilon)\psi$$

Satz (Ardens Lemma)

Sind A , B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, dann gilt

$$X = AX \cup B \implies X = A^*B$$

Speziell gilt für reguläre Ausdrücke

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \implies X \equiv \alpha^* \beta$$

Beispiel

$$\psi \equiv 0\psi \mid (1 \mid \epsilon)\phi \implies \psi \equiv 0^*(1 \mid \epsilon)\phi$$

Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$X_0 \equiv 1X_0 \mid 0X_1$$

$$\equiv$$

$$\equiv 1(1X_0 \mid 0X_1) \mid 0(1X_0 \mid 0X_1)$$

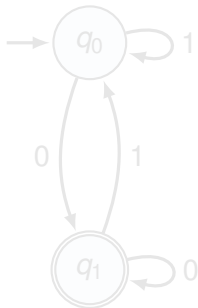
$$\equiv$$

$$\equiv 1(1X_0 \mid 0X_1) \mid 0(1X_0 \mid 0X_1)$$

$$X_1 \equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon$$

$$\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0)$$

$$\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)$$



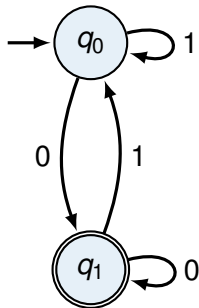
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$



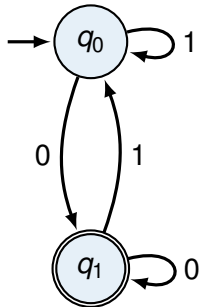
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}
 X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\
 &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\
 &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\
 &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\
 &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)
 \end{aligned}$$



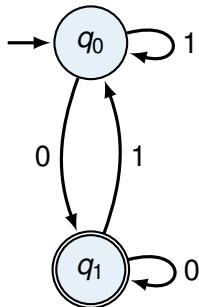
Idee

Erzeuge ein Gleichungssystem aus allen Zuständen.

- 1 Ausdruck für jeden Zustand
- 2 Auflösen nach X_0 mit Algebra und Ardens Lemma

$$\begin{aligned}X_0 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \\ &\equiv 1X_0 \mid 00^*(\epsilon \mid 1X_0) \\ &\equiv (1 \mid 00^*1)X_0 \mid 00^* \\ &\equiv (1 \mid 00^*1)^*(00^*)\end{aligned}$$

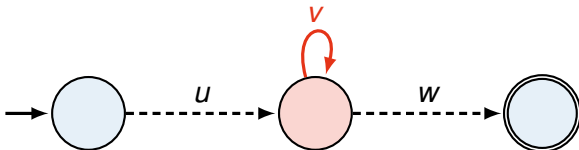
$$\begin{aligned}X_1 &\equiv 1X_0 \mid 0X_1 \mid \epsilon \\ &\equiv 0X_1 \mid (\epsilon \mid 1X_0) \\ &\equiv 0^*(\epsilon \mid 1X_0)\end{aligned}$$



Satz (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich **jedes** $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^i w \in R$



Idee

Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \forall u, v, w. z = uvw$ **nicht** pumpbar

Beispiel

Ist $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ regulär?

- 1 Sei n PL-Zahl
- 2 Wähle $z = a^n b^n$
- 3 Dann ist $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, hier: $v = a^k$ mit $k > 0$
- 4 Dann ist $uv^0 w \notin L$
- 5 Damit ist L **nicht** regulär.

Idee

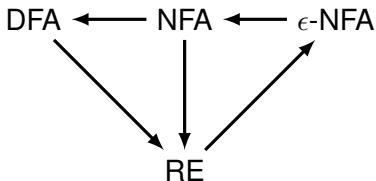
Gegenbeispiel fürs Pumpinglemma suchen.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists z \in L. |z| \geq n \forall u, v, w. z = uvw$ nicht pumpbar

Beispiel

Ist $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ regulär?

- 1 Sei n PL-Zahl
- 2 Wähle $z = a^n b^n$
- 3 Dann ist $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, hier: $v = a^k$ mit $k > 0$
- 4 Dann ist $uv^0 w \notin L$
- 5 Damit ist L nicht regulär.



Satz

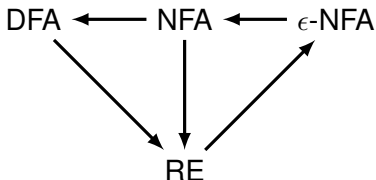
Für eine Darstellung D einer regulären Sprache ist *entscheidbar*:

Wortproblem Gegeben w , gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem Ist $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem Ist $|L(D)| < \infty$?

Äquivalenzproblem Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?



Satz

Für eine Darstellung D einer regulären Sprache ist *entscheidbar*:

Wortproblem Gegeben w , gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem Ist $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem Ist $|L(D)| < \infty$?

Äquivalenzproblem Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?