Übung 11: Aussagen über TMs und PCP

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

July 8, 2013

Definition (Spezielles Halteproblem)

Gegeben ein Wort $w \in \{0,1\}^*$.
Hält M_w bei Eingabe w?

$$K := \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$$

Satz

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

- Hält eine Turingmaschine mit sich selbst als Eingabe?
- w ist die Gödelisierung von M_w.
- K ist semi-entscheidbar, $\overline{K}$ nicht.

Definition (Allgemeines Halteproblem)

Gegeben Wörter $w, x \in \{0,1\}^*$.
Hält M_w bei Eingabe x?

$$H := \{w\#x \mid M_w[x]\downarrow\}$$

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist nicht entscheidbar.

- Es ist $K \leq H$. Warum?

Definition (Rekursiv aufzählbar)

Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar wenn $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), \ldots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}$$

Äquivalent:

- A rekursiv aufzählbar
- A semi-entscheidbar, also χ'_A berechenbar
- $A = L(M)$ für eine TM M
- A ist Bild oder Urbild einer berechenbaren Funktion

Satz (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Sei weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funktionen (F nicht trivial).
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion in F ist, also ob $\varphi_w \in F$.

- Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.
- Termination ist unentscheidbar.

Rice-Shapiro:

- Termination ist nicht semi-entscheidbar.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar.

Definition (Postsches Korrespondenzproblem)

Gegeben endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$.
Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ mit

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} = y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}$$

$\frac{x_i}{y_i}$	$\frac{001}{00}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{10}$
	1	2	3

Satz

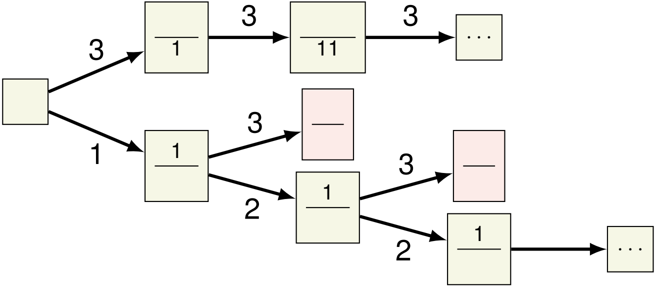
Das PCP ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar.

PCP lösen

Idee

Mögliche Lösungen aufzählen, richtige Lösungen identifizieren

x_i	001	01	1
y_i	00	10	11
	1	2	3



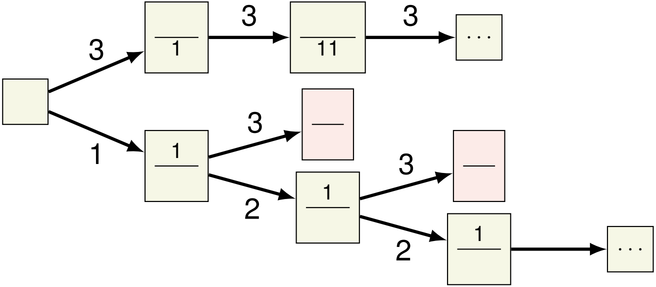
$L = \{(12^*3)^+\}$

PCP lösen

Idee

Mögliche Lösungen aufzählen, richtige Lösungen identifizieren

x_i	001	01	1
y_i	00	10	11
	1	2	3



$L = \{(12^*3)^+\}$