Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik II
Prof. Dr. Helmut Seidl
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Übungsblatt 10
24. Juni 2013

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 1. Juli, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ an, die für ein Eingabewort $w \in \{0,1\}^+$ eine Berechnung durchführt, so dass am Ende der Berechnung der Kopf am Anfang des Wortes w^R auf dem sonst leeren Band steht. (Erinnerung: w^R ist das gespiegelte Wort zu w.)

   Beschreiben Sie zunächst informell Ihre Lösungsidee!

2. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Konfigurationsfolge, dass Ihre Turingmaschine T die Eingabe 10 korrekt verarbeitet.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{*, \#\}$. Wir kodieren natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ als Folge $** \ldots *$ der Länge n, d. h. $| ** \ldots * | = n$, und stellen Paare $x, y \in \{*\}^*$ als Wort $x\#y \in \Sigma^*$ dar.
Wir betrachten für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$.
(Man beachte $1 \dot{-} 2 = 0$.)

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$ wie folgt durchführt:

   Startkonfiguration: $(\epsilon, q_0, x\#y)$.
   Endkonfiguration: $(\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)$, mit $q_e \in F$, $r \in \{*\}^*$ und $k, l \in \mathbb{N}$.
   Es gilt: $(\epsilon, q_0, x\#y) \to_M^* (\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)$.

   Beschreiben Sie kurz die Konstruktionsidee für Ihre Maschine.

2. Gilt für Ihre Maschine M bei beliebiger Eingabe $w \in \Sigma^*$ die Gleichung $L(M) = \{x\#y \mid x, y \in \{*\}^*\}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein 2-Kellerautomat $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, Z'_0, F)$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt. Der zweite Keller wird mit Z'_0 initialisiert. Die Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$ beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen): Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe b (auch $b = \epsilon$ ist möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, b, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen.

Zeigen Sie: Jede (deterministische) Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ kann durch einen 2-Kellerautomaten $K = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, Z_0, Z'_0, F')$ simuliert werden.
Hinweis: Bei einer Simulation müssen die Berechnungen bzw. Konfigurationsänderungen zweier Machinen einander zugeordnet werden können und die akzeptierten Sprachen müssen gleich sein.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ein beliebiges n-elementiges Alphabet und $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$.
Geben Sie eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma', \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit höchstens 5 Zuständen an, die bei leerer Eingabe das Alphabet Σ in der Form $\#a_1\#a_2 \ldots \#a_n$ auf das Band schreibt und mit dem Kopf auf dem letzten, rechtsstehenden Zeichen der Ausgabe anhält.

Hausaufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass man die folgende Anweisung durch ein LOOP-Programm simulieren kann, das kein IF-Konstrukt enthält: **IF** $x_i \le x_j$ **THEN** P_1 **ELSE** P_2 **END**.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Im Folgenden bezeichne $a(n, m)$ die Ackermann-Funktion.
Berechnen Sie $a(1, 6)$ und $a(2, 1)$!

Vorbereitung 2

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
3. Für jede unentscheidbare Sprache A gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.
4. Aus „A entscheidbar“ und „$A \cap B$ entscheidbar“ folgt „B entscheidbar“.

Tutoraufgabe 1

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ durch die Rekursion

$$f(n + 1) = f(n) \cdot f(n - 1)$$

mit den Startwerten $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist, indem Sie ein LOOP-Programm angeben.
2. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass f primitiv-rekursiv ist.

Tutoraufgabe 2

Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Ackermann-Funktion.

1. Zeigen Sie, dass $f(m, n) := (a(m, n))^2$ nicht primitiv rekursiv ist.
2. Die Funktion $a' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $a'(n) = a(n, n)$.
   Sei $W_{a'} = \{a'(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $b' : W_{a'} \to \mathbb{N}$ von a' μ-rekursiv ist.

Tutoraufgabe 3

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!
2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar. Beweis!
3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ mit $B \neq \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ entscheidbar.
   Zeigen Sie: B ist reduzierbar auf $\Sigma^* \setminus B$.