Übung 7: CYK und Kellerautomaten

Theoretische Informatik Sommersemester 2013

Markus Kaiser

June 10, 2013

Definition (Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus)

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in Chomsky-Normalform in $\mathcal{O}(n^3)$.
Gegeben eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in CNF und ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$. Mit

$$V_{ij} := \left\{ A \in V \mid A \to_G^* a_i \dots a_j \right\}$$

ist

$$w \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{1n}$$

$$V_{ii} = \{A \in V \mid (A \to a_i) \in P\}$$
$$V_{ij} = \left\{ A \in V \mid \exists k, B \in V_{ik}, C \in V_{k+1,j} \,.\, (A \to BC) \in P \right\}$$

Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den V_{ii}.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

4				
3				
2				
1				
	b	a	a	a

Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den V_{ii}.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

4				
3				
2				
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den V_{ii}.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

4				
3				
2	A	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den V_{ii}.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

4				
3	$\emptyset$	S, A, C		
2	A	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

Idee

Kombiniere Teilwörter zum ganzen Wort, wenn möglich.

1. Initialisiere mit den V_{ii}.
2. Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a, \quad B \to CC \mid b, \quad C \to AB \mid a$$

4	$S, \ldots$			
3	$\emptyset$	S, A, C		
2	A	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- endlichen Menge von Zuständen Q
- endlichen Eingabealphabet Σ
- endlichen Kelleralphabet Γ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \mapsto P(Q \times \Gamma^*)$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Kellerinitialisierung $Z_0 \in \Gamma$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \mapsto P(Q \times \Gamma^*)$

Definition (Akzeptanz)

Ein PDA P akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$\exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.(q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (f, \epsilon, \gamma)$$

Ein PDA P akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leerem Keller gdw

$$\exists q \in Q.(q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

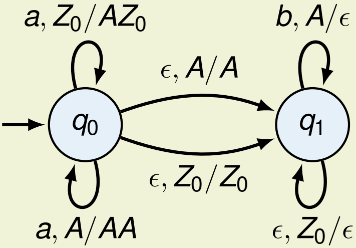
Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automaton) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \mapsto P(Q \times \Gamma^*)$

Beispiel

PDA akzeptierend mit leerem Keller zu $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.



CFG $\longleftrightarrow$ CNF $\longleftrightarrow$ PDA_ϵ $\longleftrightarrow$ PDA_F

- Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
REG	ja	ja	ja	ja	ja
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

- Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$\mathcal{O}(n)$	ja	ja	ja
CFG	$\mathcal{O}(n^3)$	ja	nein	nein

Kontextfreie Sprachen

$$\text{CFG} \longleftrightarrow \text{CNF} \longleftrightarrow \text{PDA}_\epsilon \longleftrightarrow \text{PDA}_F$$

- Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
REG	ja	ja	ja	ja	ja
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

- Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$\mathcal{O}(n)$	ja	ja	ja
CFG	$\mathcal{O}(n^3)$	ja	nein	nein