
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: keine Abgabe von Hausaufgaben für Blatt 1

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt und entsprechend abgefragt werden. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden sollen.

Vorbereitung 1

Wir studieren die Konkatenation von Wörtern und die darauf basierende Produktbildung von Mengen von Wörtern. Man beachte, dass die Konkatenation \circ grundsätzlich verschieden ist von der Tupelbildung, d. h. dem kartesischen Produkt \times .

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, aaa, b\} \subseteq \Sigma^*$.

1. Man zeige $A \times A \neq AA$.
2. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens zwei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.
 - (a) $L_1 = \{w \mid w \in A^2 \wedge w \in A^3\}$.
 - (b) $L_2 = \{w \in A^* \mid |w| = 3\}$.
 - (c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in A. u^2w = w^2u\}$.
 - (d) $L_4 = \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beachten Sie die Vereinbarung $0 \in \mathbb{N}$.

3. Die Menge A^* läßt sich informell charakterisieren als Menge derjenigen Wörter w aus Σ^* , die nicht eine der Formen $w_1 = abv$, $w_2 = ubav$ oder $w_3 = uba$ mit $u, v \in \Sigma^*$ besitzen. Zeigen Sie insbesondere die Eigenschaft

$$\forall u, v \in \Sigma^*. abv \notin A^* \wedge uba \notin A^* .$$

Vorbereitung 2

Lemma 1.7 der Vorlesung hat gezeigt, dass Σ^* abzählbar ist. Gilt dies auch für jede Teilmenge von Σ^* ? Beweis!

Vorbereitung 3

Wie wurde in der Vorlesung der Begriff des deterministischen bzw. nichtdeterministischen endlichen Automaten (DFA bzw. NFA) definiert?

1. Begründen Sie, warum $(\{0\}, \{0\}, \{((0, 0), 0)\}, 0, \{\})$ definitionsgemäß als ein DFA, nicht aber als ein NFA aufgefasst werden kann!
{ } bezeichnet die leere Menge.
2. Wie viele DFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es? Begründung!
3. Wie viele NFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es? Begründung!

Tutoraufgabe 1 (Operationen auf Sprachen)

Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C \subset \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ (ii) $B \subseteq C \implies AB \subseteq AC$

Hinweis: Es handelt sich hier um zwei äquivalente Monotonieeigenschaften.

- $A \subseteq B \implies A^n \subseteq B^n$
- $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$

Tutoraufgabe 2 (Abzählbarkeit)

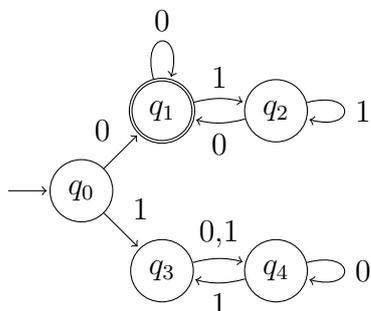
Satz 1.11 der Vorlesung hat gezeigt, dass es nicht-entscheidbare formale Sprachen gibt. Steht dies im Widerspruch zu den folgenden Behauptungen?

- Jede formale Sprache ist abzählbar.
- In der Vorlesung wurde keine nicht-entscheidbare Sprache angegeben.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Tutoraufgabe 3 (Darstellung von DFA)

Wir betrachten einen endlichen deterministischen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der durch die folgende Grafik gegeben ist.



- Übersetzen Sie die Grafik in eine extensionale Mengenschreibweise (Darstellung durch Auflistung) für Q , Σ , δ und F .
- Bestimmen Sie $\delta(\delta(q_1, 0), 1)$ und $\hat{\delta}(q_0, 10)$!
- Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium an, mit dem man entscheiden kann, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ von A akzeptiert wird.

Tutoraufgabe 4 (Spezifikation von Automaten)

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und gleichzeitig mit 1 enden oder die mit 0 beginnen und gleichzeitig mit 0 enden.

- Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert und zeigen Sie, dass es unendlich viele DFA gibt, die L akzeptieren.
- Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.
- Ist die Menge der regulären Sprachen mit Alphabet Σ abzählbar? Begründung!