Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 1

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 21.10.2013

Aufgabe 1.1

Es seien A, B, C Teilmengen der Menge Ω. Das Komplement bezüglich Ω sei für $X \subseteq \Omega$ durch $\overline{X} := \Omega \setminus X$ abgekürzt.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen soweit wie möglich, insbesondere sollte das Komplement bezüglich Ω nur noch direkt auf eine der Mengen A, B, C angewendet werden. Z.B. sollte ein Ausdruck der Form $\overline{A \cup B}$ entsprechend der Folie 28 zu $\overline{A} \cap \overline{B}$ umgeformt werden.

Geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendete Äquivalenz oder Definition an.

(a) $\overline{A \setminus (\overline{B} \triangle C)}$

(b) $\overline{(A \setminus B) \cap (C \setminus (A \cup B))}$

Erinnerung: $\triangle$ bezeichnet die symmetrische Differenz, d.h. $A \triangle B$ ist eine Abkürzung für $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Aufgabe 1.2

Jeder *natürlichen Zahl* n inkl. der 0 ordnen wir eine *Menge* $\overline{n}$ wie folgt zu:

$\overline{0} := \emptyset$, $\overline{1} := \overline{0} \cup \{\overline{0}\}$, $\overline{2} := \overline{1} \cup \{\overline{1}\}$ und allgemein $\overline{n} := \overline{n-1} \cup \{\overline{n-1}\}$.

Hinweis: Sollten Ihnen bereits Induktionsbeweise bekannt sein, so verallgemeinern und beweisen Sie (a), (b) und (c) für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie: $\overline{4} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{3} \neq \overline{4}$.

(c) Ist A eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so bezeichnet $\bigcup A$ gerade die Vereinigung aller Elemente von A.

Bestimmen Sie $\bigcup \overline{3}$ und $\bigcup \overline{0}$.

(d) Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|A|$ der Menge $A := \overline{5} \times \mathcal{P}(\overline{10} \cup \overline{3})$.

Aufgabe 1.3

Sei A eine Menge. Dann schreibt man kurz A^n für die Menge $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_n \in A\}$, die gerade aus allen n-Tupeln mit Einträgen aus A besteht. Man sagt auch, dass A^n die Menge aller *Wörter* der Länge n über dem *Alphabet* A ist.

Im Folgenden sei $A = \{a, b, c\}$.

(a) Überlegen Sie sich, warum A^1 und A formal nicht dieselben Mengen sind.

(b) Geben Sie alle Elemente von A^0 an.

(c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A^{\leq n} := \bigcup_{k=0}^{n} A^k$ die Menge aller Wörter mit Länge höchstens n.

Wie viele Elemente enthält $A^{\leq 10}$ für $A = \{a, b, c\}$? Wie viele in Abhängigkeit von n?