

Diskrete Strukturen – Aufgabenblatt 10

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 08.01.2014 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 10.1 **Doppeltes Abzählen**

Wir betrachten eine Variante des Wichtelns, bei der alle n Personen ihr mitgebrachtes Geschenk zunächst in einen großen „Grabbelsack“ legen, und anschließend die Geschenke nach und nach aus dem Grabbelsack wieder entnommen und in einer beliebigen Reihenfolge auf die n Personen verteilt werden.

Bestimmen Sie die durchschnittlichen Anzahl an Personen, die ihr mitgebrachtes Geschenk wieder mit nach Hause nehmen dürfen/müssen, wenn man über alle möglichen Zuordnungen von Geschenken auf Personen mittelt.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür ein geeignetes „Straßennetz“ (einen Graph). Wählen Sie als „Ortschaften“ zum einen alle möglichen Zuordnungen von Geschenken auf Personen und zum anderen alle Personen. Die Straßen verbinden dann gerade die Personen mit den Zuordnungen, welche der Person ihr mitgebrachtes Geschenk zuweisen.

Alternativ stellen Sie sich eine Matrix vor, die für jede Person/Geschenk genau eine Spalte und für jede Zuordnung eine Zeile besitzt: jeder Eintrag der Matrix ist entweder eine 0 oder eine 1; eine Spalte beschreibt gerade, welche der Zuordnungen der entsprechenden Person ihr Geschenk wieder zuordnen.

Aufgabe 10.2 **Schubfachprinzip**

Prof. Evilparza schießt an Silvester gerne mit Feuerwerksraketen auf die Front des nahegelegenen Studentenwohnheims.

Die Front hat dabei eine Breite von 20 Metern und eine Höhe von 7,5 Metern und unterteilt sich gleichmäßig in Wohnungen von der Breite 4 Meter und Höhe 2,5 Meter.

Wieviele Raketen muss Prof. Evilparza mindestens auf das Wohnheim abfeuern, damit mindestens eine der Wohnungen von mindestens vier Raketen getroffen wird?

Hinweis: Auf Grund langjähriger Übung trifft jede Rakete das Wohnheim.

Aufgabe 10.3 **Schubfachprinzip**

Der Nikolaus hat insgesamt 16 verschiedene Geschenke, welche alle einen Wert zwischen 1 und 4000 Euro haben. Zufälligerweise haben keine zwei der 16 Geschenke denselben Wert.

Sein Problem: Er muss die Geschenke so auf zwei Kinder aufteilen, dass beide am Ende Geschenke mit demselben Gesamtwert bekommen. Dabei muss jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommen, Geschenke dürfen nicht doppelt vergeben werden, der Nikolaus darf aber auch einige Geschenke für sich behalten.

Zeigen Sie, dass der Nikolaus stets eine Lösung finden kann.

Aufgabe 10.4 **Ramsey-Zahlen**

Die „Knecht Ruprecht“-Zahl $R(m, n)$ gibt bekanntlich die kleinste Anzahl von Personen an, so dass es unter diesen Personen entweder mindestens m Personen gibt, die sich alle gegenseitig beschenken, oder es n Personen gibt, die sich alle gegenseitig nicht beschenken. („beschenken“ sei eine symmetrische Relation.)

Zeigen Sie, dass stets $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$ gilt für $m, n \geq 2$.

Aufgabe 10.5 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Prof. Evilparza muss heuer – als Straffaktion für einen Missbrauch von Feuerwerk – bei der Weihnachtsfeier des lokalen Studentenwohnheims Geschenke verteilen. Für ihn sind natürlich alle Studenten ununterscheidbar.

Da es ihm dabei sehr langweilig ist, fängt er an, über folgende Zahlen nachzudenken:

Sei $S_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, um n unterscheidbare Geschenke auf k ununterscheidbare Studenten zu verteilen, wobei jeder Student mindestens ein Geschenk bekommt.

Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, um n ununterscheidbare Geschenke auf k ununterscheidbare Studenten zu verteilen, wobei wiederum jeder Student mindestens ein Geschenk bekommt.

Natürlich wird kein Geschenk mehrfach verteilt und es gilt $n \geq k$.

- (a) Zeigen Sie: $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.
- (b) Zeigen Sie mittels Induktion nach n : $S_{n,3} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$.
- (c) Zeigen Sie: $P_{n,3} \in O(n^2)$.

Frohe Feiertage und ein gutes neues Jahr

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 06.01.2014

Aufgabe 10.1 Inklusion/Exklusion

Sie sind als Projektleiter dafür zuständig, $n \geq 3$ Aufgaben so auf 3 Personen zu verteilen, dass jede Aufgabe genau einer der drei Personen zugeteilt ist, jede der drei Personen aber auch mindestens eine Aufgabe zugeteilt bekommt.

Wir sind an der Anzahl der zulässigen Zuordnungen interessiert.

- (a) Nehmen Sie an, dass die einzelnen Aufgaben und die Personen unterscheidbar sind, und betrachten Sie dann als Grundmenge alle Zuordnungen $\Omega = \{f: [n] \rightarrow [3]\}$, wobei $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Setzen Sie dann $A_i = \{f: [n] \rightarrow [3] \setminus \{i\}\}$ für $i \in [3]$, so dass A_i gerade die Menge aller Zuordnungen ist, so dass Person i keine Aufgaben zugeteilt bekommt.

Verwenden Sie dann die Siebformel, um $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ zu bestimmen. Lösen Sie dann die Aufgabe.

- (b) Nehmen Sie nun an, dass die Personen unterscheidbar, die einzelnen Aufgaben jedoch ununterscheidbar sind. Passen Sie die Lösungsweg aus (a) entsprechend an und bestimmen Sie dann die Anzahl der möglichen Zuordnungen.
- (c) Betrachten Sie analog die verbleibenden zwei Fälle: ununterscheidbare Personen und unterscheidbare Aufgaben bzw. ununterscheidbare Personen und ununterscheidbare Aufgaben.

Aufgabe 10.2 Inklusion/Exklusion

Wir betrachten ein Alphabet Σ mit n Zeichen. Wie viele Wörter $w \in \Sigma^{2n}$ gibt es, in denen jedes Zeichen genau 2-mal vorkommt, wobei die beiden Vorkommen eines Zeichens durch mindestens ein anderes Zeichen getrennt sind?

Hinweis: Es sei Ω die Menge aller Wörter über Σ der Länge $2n$, in denen jeder Buchstabe aus Σ genau zweimal vorkommt. Für $a \in \Sigma$ sei A_a dann die Menge aller Wörter aus Ω , so dass die beiden Vorkommen von a direkt aufeinanderfolgen. Bestimmen Sie dann mit Hilfe der Siebformel $|\bigcup_{a \in \Sigma} A_a|$.

Aufgabe 10.3

Es seien $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ und $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ die Stirling-Zahlen 1. bzw. 2. Art. Zeigen Sie für $k, n \geq 0$:

$$(a) \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right] = \sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] \binom{j}{k}$$

$$(b) \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$(c) \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$$

Aufgabe 10.4

Wie viele Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$ gibt es, die genau k verschiedene Funktionswerte annehmen?