

Übung 1: Mengen

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

- Markus Kaiser
 - Mail: tutor@zfix.org
 - Web: ds.zfix.org
- Vorlesung
 - Dienstag 13:45-15:15 in MI HS1
 - Donnerstag 10:15-11:45 in MI HS1
- Meine Tutorübungen
 - Dienstag 12:00-14:00 in 03.09.014
 - Dienstag 16:15-17:45 in 03.11.018
 - Offiziell müsst ihr in die angemeldete Übung!

■ Hausaufgaben

- Abgabedatum auf Übungsblatt
- Abgabe in Briefkästen, Rückgabe in Tutorübung
- Geheftet, Handschriftlich, Deckblatt
- Teams aus 3 oder 4 Studenten
- Teams nicht änderbar, nicht gruppenübergreifend
- Üblicherweise schwerer als Klausurstoff

■ Notenbonus

- „Bepunktung“ mit Ampelfarben
- Bei $\frac{2}{3}$ mindestens gelb
- 0.3 Notenstufen Bonus auf bestandene Klausur

■ Tutoraufgaben

- Lösen wir zusammen in den Übungen
- Üblicherweise schwerer als Klausurstoff

- Mathematische Grundlagen
 - Mengen, Relationen, Funktionen
 - Logik
 - Beweise
- Kombinatorik
 - Zählkoeffizienten
 - Spaß mit Urnen
- Graphentheorie
 - Definition
 - Ein paar Algorithmen
- Algebra
 - Modulo
 - Algebren
 - Gruppen, vielleicht Körper

Definition (Menge)

Eine **Menge** ist eine **ungeordnete** Sammlung **unterscheidbarer** Objekte.

Mit **Mengenklammern** werden Objekte zusammengefasst.

$$A := \{a, b, \dots, z\}$$

Man nennt a ein **Element** von A , es gilt $a \in A$.

- Reihenfolge ist **egal**
- Elemente kommen **nicht** mehrfach vor

Beispiel

- $\{a, b, c, a, c\} = \{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\emptyset := \{\}$

Definition (Extensionale Schreibweise)

Die **extensionale Schreibweise** einer Menge zählt ihre Elemente auf.

$$M := \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Beispiel

- $A := \{2, 4, 6, \dots\}$
- $B := \{1, 2, 3, 4\} = [4]$
- $C := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
- $D := \{\alpha, a, \odot, 8, \{1, 2\}, \mathbb{N}\}$

Definition (Intensionale Schreibweise)

Die **intensionale Schreibweise** beschreibt eine Menge durch charakteristische Eigenschaften.

$$M := \{x \in \Omega \mid P(x)\}$$

M enthält alle Elemente im **Universum** Ω mit der Eigenschaft P .

Beispiel

- $A := \{2, 4, 6, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\} = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$
- $B := \{1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$
- $C := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ prim}\}$

Bezeichnungen

- Objekte in Mengen

$a \in A$ a ist Element von A

$b \notin A$ b ist kein Element von A

$|A|$ Anzahl der Elemente in A , Kardinalität

- Relationen zwischen Mengen

$B \subseteq A$ B ist Teilmenge von A , $x \in B \rightarrow x \in A$

$B \subset A$ B ist echte Teilmenge von A

$B = A$ $B \subseteq A$ und $A \subseteq B$

Beispiel

- $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$, aber $9 \notin \{1, 2, 3, 4\}$

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, aber $\{1, 5\} \not\subseteq \{1, 2\}$

- $\emptyset \subseteq [5] \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Operationen

$$\bar{A} := \{x \mid x \notin A\}$$

Komplement

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Vereinigung

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Schnitt

$$A \setminus B := A \cap \bar{B}$$

Differenz

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Symmetrische Differenz

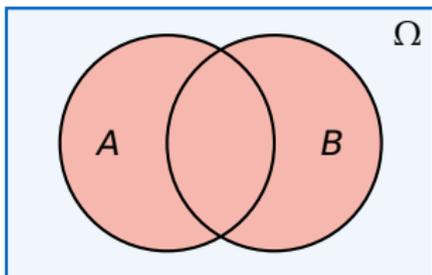
Für mehrere Mengen schreibt man

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

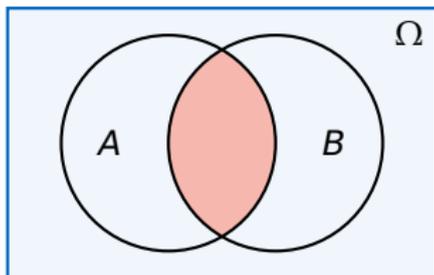
$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Venn-Diagramme visualisieren Mengen A, B, \dots im Universum Ω .

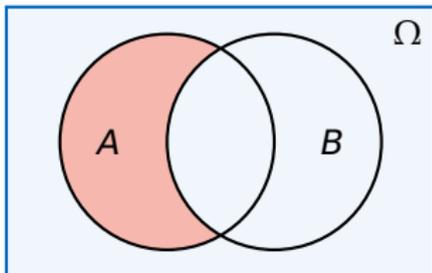
■ $A \cup B$



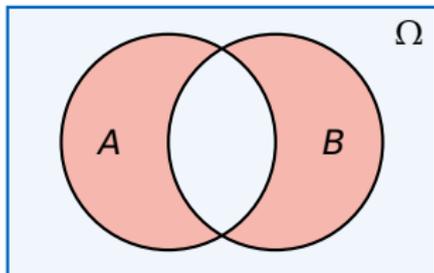
■ $A \cap B$



■ $A \setminus B$



■ $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Satz (De Morgansche Gesetze)

Sind A, B Mengen, dann gilt

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Für Mengen A_i gilt

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

- Zusammen mit $\overline{\bar{A}} = A$ wichtigste Regel
- Gilt auch in der Aussagenlogik

Definition (Potenzmenge)

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ zu einer Menge M ist die Menge all ihrer Teilmengen.

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\}$$

- $\mathcal{P}(M)$ enthält für endliche Mengen genau $2^{|M|}$ Elemente
- Man schreibt deshalb auch 2^M
- Es ist $M \in \mathcal{P}(M)$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

Beispiel

Für $M = \{a, b, c\}$ ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

mit $|\mathcal{P}(M)| = 2^3 = 8$

Definition (Tupel)

Ein n -Tupel ist eine **geordnete** Sammlung n **beliebiger** Objekte. Mit **Tupelklammern** werden Objekte zusammengefasst.

$$T := (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

- Reihenfolge **nicht** egal
- Elemente **dürfen** mehrmals vorkommen

Beispiel

- $(a, b, c) \neq (c, a, b) \neq (a, b, c, a, c)$
- $(1, 2, 3) \neq \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$
- $(\{\alpha, \beta\}, \emptyset, \mathbb{N})$

Definition (Kreuzprodukt)

Sind A, B Mengen, dann ist ihr **kartesisches Produkt** (Kreuzprodukt)

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für Mengen A_i ist

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

- Für endliche A_i ist $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$
- Man schreibt $A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$ mit $A^0 = \{\emptyset\}$

Beispiel

- $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$
- $\{\alpha, \beta\}^2 = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$