Übung 2: Relationen und Abbildungen

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

Definition (Relation)

Eine binäre Relation R verbindet Elemente zweier Mengen A und B.

$$R \subseteq A \times B$$

Ist $(a, b) \in R$, so schreibt man auch $a \mathrm{R} b$.

- Eine Relation über $M \times M$ nennt man homogen
- Es gibt $|\mathcal{P}(A \times B)|$ Relationen über A, B

Beispiel

- Die Gleichheitsrelation über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7) \ldots\}$
- Die Teilbarkeitsrelation über $\mathbb{N}$
  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 2), (2, 4), \ldots, (3, 3), (3, 6), \ldots\}$

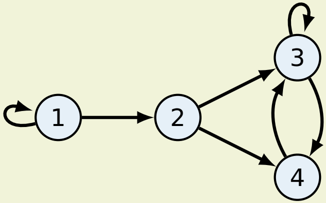
Grafische Darstellung von Relationen

Jede Relation $R \subseteq M \times M$ kann als Graph dargestellt werden. Die Elemente aus M werden zu Knoten und für jedes Tupel $(a, b) \in R$ wird ein Pfeil von a nach b eingefügt.

Beispiel

Sei $R \subseteq [4] \times [4]$ eine Relation über den natürlichen Zahlen.

$$R := \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3)\}$$



Eigenschaften homogener Relationen

Sei $R \in M \times M$ eine homogene Relation. Man nennt R

reflexiv	$\forall a \in M.\ (a,a) \in R$
total	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$
symmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
asymmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$
antisymmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a \equiv b$
transitiv	$\forall a,b,c \in M.\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

- Jede totale Relation ist reflexiv
- Jede asymmetrische Relation ist antisymmetrisch
- Äquivalenzrelationen sind reflexiv, symmetrisch und transitiv
- R^+ ist die transitive Hülle, R^* die reflexive transitive Hülle

Definition (Funktion)

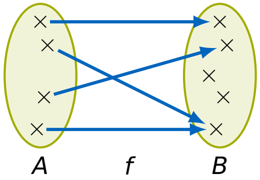
Eine Relation $f \subseteq A \times B$ ist eine Funktion von A nach B wenn es für alle $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ mit $a \, \mathfrak{f} \, b$ gibt.

$$\forall a \in A. \, |\{(a, b) \mid b \in B\}| = 1$$

Man schreibt

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) = b \end{aligned}$$

$A \to B$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von A nach B.



Definition (Bild)

Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $b \in B$. Dann ist

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

das Bild der Menge X unter f. Außerdem ist

$$f^{-1}(b) := \{a \mid a \in A, f(a) = b\}$$
$$f^{-1}(Y) := \bigcup_{y \in Y} \left\{f^{-1}(y)\right\}$$

das Urbild des Elements b und der Menge Y unter f.

- Man nennt $A = f^{-1}(B)$ Urbild oder Definitionsmenge von f
- Man nennt $f(A) \subseteq B$ Bild oder Wertemenge von f

Definition (Funktionskomposition)

Seien $f : B \to C$ und $g : A \to B$ Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned} h &: A \to C \\ &a \mapsto (f \circ g)(a) = f(g(a)) \end{aligned}$$

die Komposition der Funktionen f und g.
Man ließt $f \circ g$ als „f nach g“.

Man definiert die Potenzierung von Funktionen ähnlich der Mengentheorie.

$$\begin{aligned} f^0 &:= id \\ f^n &:= \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n mal}} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet id die Identität mit $id(x) := x$.

Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Man nennt f

- injektiv $\forall b \in B. \left|f^{-1}(b)\right| \leq 1$ (Kein b wird doppelt getroffen)
- surjektiv $\forall b \in B. \left|f^{-1}(b)\right| \geq 1$ (Jedes b wird getroffen)
- bijektiv $\forall b \in B. \left|f^{-1}(b)\right| = 1$ (Jedes b wird genau einmal getroffen)