

## Übung 6: Prädikatenlogik

**Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014**

Markus Kaiser

8. Januar 2014

## Definition (Term)

Die Menge  $\mathcal{T}$  aller **Terme** ist induktiv definiert.

- Jede Konstante ist in  $\mathcal{T}$
- Jede Variable ist in  $\mathcal{T}$
- Sind  $f$  eine Funktion und  $t_1, \dots, t_n$  Terme, dann auch

$$f(t_1, \dots, t_n)$$

Funktionen wandeln Terme in **Terme** um. Wir beschreiben sie mit Kleinbuchstaben.

## Definition (Prädikat)

**Prädikate**  $P$  wandeln Terme in **Wahrheitswerte** um. Wir beschreiben sie mit Großbuchstaben.

Die Menge  $\mathcal{P}$  enthält alle **Prädikate**.

## Definition (Syntax der Prädikatenlogik)

Die Menge  $\mathcal{L}$  aller **prädikatenlogischen Formeln** ist induktiv definiert. Seien  $A, B \in \mathcal{L}$ ,  $t_i \in \mathcal{T}$  und  $P \in \mathcal{P}$ . Dann sind alle Formeln

## ■ Grundbausteine

$$V = \{a, b, \dots\} \subseteq \mathcal{L} \quad (\text{Variablen})$$

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L} \quad (\text{Prädikate, Konstanten})$$

$$t_i = t_j \in \mathcal{L} \quad (\text{Gleichheit})$$

## ■ Verknüpfungen der Aussagenlogik

$$\neg A \in \mathcal{L} \quad (\text{Negation})$$

$$(A \wedge B), (A \vee B) \in \mathcal{L} \quad (\text{Konjunktion, Disjunktion})$$

$$(A \rightarrow B) \in \mathcal{L} \quad (\text{Implikation})$$

## ■ Quantoren

$$\exists x.A \in \mathcal{L} \quad (\text{Existenzquantor})$$

$$\forall x.A \in \mathcal{L} \quad (\text{Allquantor})$$

## Definition (Bindungsregeln)

Die **Bindungsstärke** der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\forall \exists \neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$$

Die Implikation ist **rechtsassoziativ**.

- Üblicherweise klammert man wieder  $\wedge$  und  $\vee$
- Genauso klammert man Quantoren

$$(\forall x.F) \rightarrow G \quad \text{statt} \quad \forall x.F \rightarrow G$$

- **Achtung!** Äußere Quantoren werden öfter anders interpretiert

$$\forall x \forall y.F \wedge G \leftrightarrow H$$

Bindet formal **nur an das F!**

## Definition (Struktur)

Eine passende **Struktur**  $S = (U_S, I_S)$  zu einer Formel  $F$  besteht aus einem **Universum**  $U_S$  und einer **Interpretation**  $I_S$ .

- Alle Terme werten zu einem Wert im **Universum**  $U_S$  aus
- Die **Interpretation**  $I_S$  weist den Atomen der Formel Werte zu. Sie spezifiziert

- **Variablen**  $x$  mit

$$x_S \in U_S$$

- **Konstanten**  $a$  mit

$$a_S \in U_S$$

- **k-stellige Prädikate**  $P$  mit

$$P_S \subseteq U_S^k$$

- **Funktionen**  $f$  mit

$$f_S : U_S^k \rightarrow U_S$$