

# Übung 7: Kalküle II & Induktion

## Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

|               | Introduktion   | Elimination   |
|---------------|--|---|
| $\wedge$      | $\frac{\tau \quad \varphi}{\tau \wedge \varphi} +\wedge$   | $\frac{\tau \wedge \varphi}{\tau} -\wedge_1 \quad \frac{\tau \wedge \varphi}{\varphi} -\wedge_2$  |
| $\vee$        | $\frac{\tau}{\tau \vee \varphi} +\vee_1 \quad \frac{\varphi}{\tau \vee \varphi} +\vee_2$                       | $\frac{\tau \vee \varphi \quad \boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} -\vee$ |
| $\rightarrow$ | $\frac{\boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}}{\tau \rightarrow \varphi} +\rightarrow$ | $\frac{\tau \quad \tau \rightarrow \varphi}{\varphi} -\rightarrow, \text{MP}$   |
| $\neg$        | $\frac{\boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg \tau} +\neg$                         | $\frac{\tau \quad \neg \tau}{\perp} -\neg$  |

|            | Introduktion                           | Elimination                                |
|------------|--|--|
| $\perp$    |  | $\frac{\perp}{\tau} \text{ -- } \perp$     |
| $\neg\neg$ | $\frac{\tau}{\neg\neg\tau} \text{ ++}$ | $\frac{\neg\neg\tau}{\tau} \text{ --}\neg$ |

## ■ Praktische abgeleitete Regeln

$$\frac{}{\tau \vee \neg\tau} \text{ LEM}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\tau \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\tau} \text{ --}\neg, \text{ PBC}$$

$$\frac{\neg\varphi \quad \tau \rightarrow \varphi}{\neg\tau} \text{ MT}$$

## Definition (Ersetzung)

Sei  $\varphi$  eine Formel und  $a$  eine Konstante.

Mit  $\varphi[x/a]$  bezeichnen wir die Formel die man erhält, wenn man alle **freien** Vorkommnisse von  $x$  in  $\varphi$  durch  $a$  **ersetzt**.

|           | Introduktion  | Elimination   |
|-----------|---|---|
| $\exists$ | $\frac{\tau[x/a]}{\exists x.\tau} \quad +\exists$   | $\frac{\exists x.\tau \quad \boxed{\begin{array}{c} a.\tau[x/a] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} \quad -\exists$ |
| $\forall$ | $\frac{\boxed{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ \tau[x/a] \end{array}}}{\forall x.\tau} \quad +\forall$ | $\frac{\forall x.\tau}{\tau[x/a]} \quad -\forall$   |

- Man muss ein **unbenutztes**  $a$  in  $+\forall$  und  $-\exists$  wählen

## Vollständige Induktion

Die **vollständige Induktion** ist eine Beweistechnik, um zu zeigen, dass alle natürlichen Zahlen ein Prädikat  $P$  erfüllen.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. P(x)$$

Ein solcher Beweis besteht aus

**Induktionsanfang** Man zeigt, dass  $P(0)$  gilt.

**Induktionsschritt** Man zeigt für ein beliebiges  $k$ , dass wenn  $P(k)$  gilt (**Induktionshypothese**), dann auch  $P(k+1)$ .

Zusammen beweisen die Teile, dass das Prädikat für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.

In Prädikatenlogik formuliert gilt in  $\mathbb{N}_0$

$$P(0) \wedge \forall k. (P(k) \rightarrow P(k+1)) \rightarrow \forall n. P(n)$$

- Kann verallgemeinert werden, z.B. auf  $\mathbb{Z}$
- Aber nicht auf  $\mathbb{R}$  (Warum?)