

Übung 8: Induktion II & Landausymbole

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

Definition (Wohlfundierte Relation)

Eine Relation $\prec \subseteq A \times A$ heißt **wohlfundiert**, wenn keine **unendlichen Folgen** von Elementen $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$ existieren, sodass

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \dots$$

Jede Kette hat ein **unteres Ende**.

Beispiel

- $\prec_1 := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$ ist wohlfundiert.
- $\prec_2 := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$ ist **nicht** wohlfundiert.
- $\prec_3 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a < b\}$ ist **nicht** wohlfundiert.
- $\prec_4 := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists x. x \text{ teilt } a \wedge x \text{ teilt } b\}$ ist **nicht** wohlfundiert.
- $\prec_5 := \emptyset$ ist wohlfundiert.

Wohlfundierte Induktion

Die **wohlfundierte Induktion** verallgemeinert die vollständige Induktion.

Um für eine Menge A mit wohlfundierter Relation \prec ein Prädikat

$$\forall a \in A. P(a)$$

zu zeigen, beweist man

Induktionsanfang Man zeigt, dass für alle bezüglich \prec **minimalen** Elemente m_i das Prädikat gilt.

Induktionsschritt Man zeigt, dass wenn **alle kleineren** Elemente als n das Prädikat erfüllen, so auch n .

In Prädikatenlogik formuliert gilt

$$\forall a \in A. (\forall b \prec a. P(b) \rightarrow P(a)) \quad \text{gdw.} \quad \forall a \in A. P(a)$$

- Wo ist der Induktionsanfang?

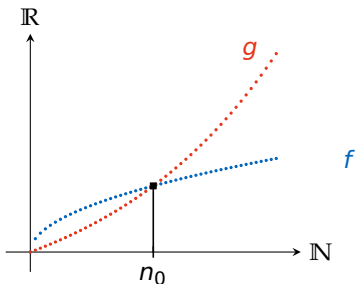
Definition (Asymptotisches Verhalten)

Eine Funktion g ist **asymptotisch größer** (wächst asymptotisch **schneller**) als eine andere Funktion f , wenn gilt

$$\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. |f(n)| < |g(n)|$$

- Der Einfachheit halber betrachten wir **strikt positive** Funktionen
- Dann sind die Beträge egal

- Oftmals sind **Vorfaktoren** nicht interessant



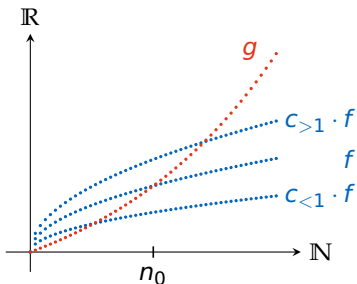
Definition (Asymptotisches Verhalten)

Eine Funktion g ist **asymptotisch größer** (wächst asymptotisch **schneller**) als eine andere Funktion f , wenn gilt

$$\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. |f(n)| < |g(n)|$$

- Der Einfachheit halber betrachten wir **strikt positive** Funktionen
- Dann sind die Beträge egal

- Oftmals sind **Vorfaktoren** nicht interessant



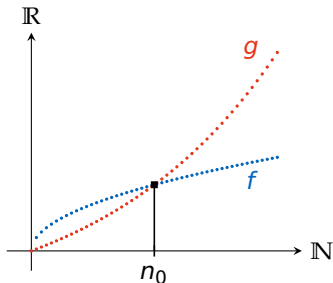
Definition (Asymptotische obere Schranke)

Seien f, g **strikt positiv**. Eine Funktion f wächst **asymptotisch maximal so schnell** wie eine Funktion g , wenn gilt

$$\exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)$$

wir schreiben dann

$$f \in \mathcal{O}(g)$$



- $\mathcal{O}(g)$ ist eine Menge von Funktionen ...
- ... die maximal so schnell wachsen wie g

Definition (Landausymbole)

Seien f, g **strikt positiv**. Analog zu $\mathcal{O}(g)$ definiert man weitere Mengen von Funktionen.

$$o(g) := \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. f(n) < c \cdot g(n)\} \quad (\text{langsamer})$$

$$\mathcal{O}(g) := \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)\} \quad (\text{nicht schneller})$$

$$\Theta(g) := \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \quad (\text{gleich schnell})$$

$$\Omega(g) := \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. f(n) \geq c \cdot g(n)\} \quad (\text{nicht langsamer})$$

$$\omega(g) := \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0. f(n) > c \cdot g(n)\} \quad (\text{schneller})$$

Es ist

$$o(g) \subseteq \mathcal{O}(g)$$

$$o(g) \cap \Omega(g) = \emptyset$$

$$\omega(g) \subseteq \Omega(g)$$

$$\omega(g) \cap \mathcal{O}(g) = \emptyset$$

Satz (Landausymbole mit Grenzwerten)

Existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right|$, dann gilt

$f \in o(g)$	gdw.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(n)}{g(n)} \right = 0$
$f \in \mathcal{O}(g)$	gdw.	$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(n)}{g(n)} \right < \infty$
$f \in \Theta(g)$	gdw.	$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(n)}{g(n)} \right < \infty$
$f \in \Omega(g)$	gdw.	$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(n)}{g(n)} \right \leq \infty$
$f \in \omega(g)$	gdw.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(n)}{g(n)} \right = \infty$