Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 2

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 30.10.2013 um 14:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 2.1

Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \\ B &:= \{\{x, \{x, y\}\} \mid x \in A, y \in A\} \setminus A \\ C &:= \mathcal{P}(B \cup A) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Mächtigkeit jeder dieser Mengen. Für diese Aufgabe reicht es, die entsprechenden Zahlenwerte anzugeben.

Hinweis: Verwenden Sie die Notation aus TA1.2, um die Definitionen zu vereinfachen.

Aufgabe 2.2

Es seien A, B, C Teilmengen der Menge Ω. Das Komplement bezüglich Ω sei für $X \subseteq \Omega$ durch $\overline{X} := \Omega \setminus X$ abgekürzt.

Verwenden Sie

- die Äquivalenzen für Mengen aus der Vorlesung (Folien 24 und 29) und
- die in den Tutorübungen gezeigte Äquivalenz $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ für $X, Y \subseteq \Omega$,

um die folgenden Mengendefinitionen schrittweise zu Ausdrücken der Form $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ umzuformen, wobei M_i ein beliebiger Schnitt der Mengen A, B, C und deren deren Komplementen bzgl. Ω ist.

Beispiel: Die Menge $A \setminus (B \cup C) \cup (B \cap C) \setminus A$ sollte als $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ geschrieben werden, da:

$$\begin{aligned} & A \setminus (B \cup C) \cup (B \cap C) \setminus A && \text{mit } X \setminus Y = X \cap \overline{Y} \\ = \; & (A \cap \overline{B \cup C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) && \text{mit } \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} \\ = \; & (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \end{aligned}$$

Bringen Sie entsprechend folgende Ausdrücke schrittweise in die geforderte Form. Vereinfachen Sie die Schnitte soweit wie möglich. Geben Sie bei jedem Schritt die verwendete Äquivalenz oder Definition an – Verwendung von Kommutativität und Assoziativität muss nicht angegeben werden.

(a) $((A \cup (B \cup C)) \cap (C \setminus A))$.

(b) $\overline{(A \cap \overline{B \cap C})} \setminus (A \setminus B)$.

Aufgabe 2.3

Es seien u, v, x, y beliebige Mengen. Man kann dann zeigen, dass:

$$x = u \text{ und } y = v \text{ genau dann, wenn } \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

Zeigen Sie *unter der Annahme* $x \neq y$, dass aus $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ – wie behauptet – tatsächlich $x = u$ und $y = v$ folgt.

Erinnerung: Zwei Mengen A, B sind identisch ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element der einen Menge auch ein Element der jeweils anderen Menge ist.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 28.10.2013

Aufgabe 2.1

Im Folgenden betrachten wir das feste Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ und definieren verschiedene binäre Relationen über A^*. Entscheiden Sie für jede dieser Relationen, ob sie reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv ist.

(a) uRw gdw. „u ist ein Präfix von w”, d.h. es gibt ein $x \in A^*$, so dass $ux = w$.

(b) uRw gdw. „u ist kein Teilwort von w”, d.h. es gibt keine $x, y \in A^*$, so dass $xuy = w$.

(c) uRw gdw. „u entsteht aus w durch Umkehren der Leserichtung”, d.h. falls $w = b_1b_2 \dots b_{m-1}b_m$ gilt, so ist $u = b_mb_{m-1} \dots b_2b_1$.

Aufgabe 2.2

(a) Sei $M = \{a, b, c\}$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen über M.

(b) Wir betrachten eine beliebge Grundmenge M und zwei Äquivalenzrelation $\equiv_1$ und $\equiv_2$ über M.

$\equiv_1$ ist *feiner* als $\equiv_2$ genau dann, wenn für alle a, b mit $a \equiv_1 b$ auch $a \equiv_2 b$ gilt.

(i) Welches ist die „feinste” Äquivalenzrelation? Welches ist die „gröbste”?

(ii) $M_\equiv$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv$.

Zeigen Sie: $\equiv_1$ ist feiner als $\equiv_2$, genau dann, wenn für jedes $K_1 \in M_{\equiv_1}$ ein $K_2 \in M_{\equiv_2}$ mit $K_1 \subseteq K_2$ existiert.

Aufgabe 2.3

Sei $f\colon X \to Y$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent zu einander sind:

(a) f ist injektiv.

(b) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

(c) Es gilt $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ für alle $B \subseteq A \subseteq X$.

Hinweis: Wie üblich wird f von X auf Teilmengen von X erweitert, indem man $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ definiert.

Aufgabe 2.4 *** wird nicht besprochen**

Es sei A eine abzählbare Menge. Wie üblich sei $A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ die Menge aller endlichen Tupel (Wörter, Sequenzen) über dem Alphabet A.

Zeigen Sie, dass dann auch A^* abzählbar ist, indem Sie ein Verfahren angeben, das irgendwann jedes Element von A^* (mindestens) einmal ausgibt.

Schicken Sie Ihre Lösung an Prof. Esparza.