

Diskrete Strukturen – Aufgabenblatt 8

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 11.12.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 8.1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $3^{2n} + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 8 (ohne Rest) teilbar ist.

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8.3 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Es sei weiterhin $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der Goldene Schnitt.

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass (1) $\Phi^2 = 1 + \Phi$, (2) $\Phi^{-2} = 2 - \Phi$ und (3) $1 - \Phi = -\Phi^{-1}$.
- (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - (-\Phi)^{-n}).$$

Hinweise: Beachten Sie, dass Sie für den Induktionsschritt Annahmen über sowohl f_{n-1} als auch f_{n-2} getroffen werden müssen. Entsprechend muss der Induktionsanfang angepasst werden!

Aufgabe 8.4 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Wir betrachten zwei Varianten der „Türme von Hanoi“. Stets gilt, dass zu Beginn alle Scheiben ganz links liegen und mit Hilfe der mittleren Position nach ganz rechts bewegt werden müssen, wobei nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe liegen darf. Es gelte jeweils $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Variante 1: Zu Beginn liegen $2n$ Scheiben auf dem linken Stift, wobei es von jeder Größe genau 2 Scheiben gibt.
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass man mit höchstens $2^{n+1} - 2$ Zügen alle Scheiben nach rechts bewegen kann.
- (b) Variante 2: Wie in Variante gibt es $2n$ Scheiben, je zwei von jeder Größe, allerdings sind die Scheiben nun von unten beginnend abwechselnd rot (unterste Scheibe) und weiß eingefärbt. Ziel ist es nun, den Stapel so von links nach rechts zu bewegen, dass am Schluss wieder die Scheiben von unten beginnend abwechselnd rot (unterste Scheibe) und weiß eingefärbt sind.

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass man mit höchstens $2^{n+2} - 5$ Zügen die Aufgabe lösen kann.

Hinweis: Verwenden Sie geeignet das Resultat aus (a).

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 09.12.2013

Aufgabe 8.1

Eine binäre Relation $\prec \subseteq M \times M$ ist *wohlfundiert*, wenn es keine unendliche Folge a_1, a_2, a_3, \dots von Elementen aus M $a_{i+1} \prec a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Jede wohlfundierte Relation \prec ist irreflexiv (d.h. es gibt kein $x \in M$ mit $x \prec x$).

(b) Wir definieren auf $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ die Relation $\prec := \{(a, b) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^2 \mid a < b \wedge a \mid b\}$.

Zeigen Sie, dass \prec wohlfundiert ist.

Bemerkung: $a \mid b$ steht für „ a teilt b “.

(c) Sei \prec eine wohlfundierte Relation über der Menge M und P eine Eigenschaft (Prädikat). Dann besagt das

$$\text{Prinzip der wohlfundierten Induktion: } \forall a \in M: P(a) \text{ gdw. } \forall a \in M: (\forall b \prec a: P(b) \rightarrow P(a))$$

In Worten: Um zu zeigen, dass jedes $a \in A$ die Eigenschaft P besitzt, zeige für jedes $a \in A$: Wenn alle b , die „kleiner“ als a sind, bereits die Eigenschaft P besitzen, dann besitzt auch a die Eigenschaft P .

(i) Worin besteht der *Induktionsanfang* im Fall der wohlfundierten Induktion?

(ii) Wie ergibt sich die vollständige Induktion als Spezialfall der wohlfundierten Induktion?

(iii) Verwenden Sie das Prinzip der wohlfundierten Induktion bzgl. der in (a) definierten Relation, um zu zeigen:

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung, d.h. eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen $k, p_1, \dots, p_k, e_1, \dots, e_k$ mit (1) $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, (2) jedes p_i ist eine Primzahl und (3) $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$.

(d) In manchen Fällen erlaubt die Negation des Induktionsprinzips Beweise eleganter darzustellen:

Um zu zeigen, dass $\forall x \in M: P(x)$ gilt, nimmt man an, dass die Menge $A := \{x \in M \mid \neg P(x)\}$ nicht leer ist (d.h. man nimmt an, dass $\exists a \in M: \neg P(a)$ gilt). Dann wählt man aus A ein bzgl. \prec minimales Element (d.h. $\forall b \in A: \neg(b \prec a)$) und leitet einen Widerspruch her.

(i) Überprüfen Sie, dass das Vorangegangene tatsächlich äquivalent zu $\neg \forall a \in M: (\forall b \prec a: P(b) \rightarrow P(a))$ ist.

(ii) Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen mit (1) $0 \in H$, (2) falls $x \in H$, dann auch $-x \in H$, (3) falls $x, y \in H$, dann auch $x + y \in H$. Wir nehmen weiter an, dass H neben der 0 noch mindestens ein weiteres Element enthält. Sei dann $m := \min\{x \in H \mid x > 0\}$.

Zeigen Sie: $H = \{m \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 8.2

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, in welcher Relation im Sinne der Landau-Notation stehen ($f \in O(g)$, $f \in o(g)$, $f \in \Theta(g)$, $f \in \Omega(g)$, $f \in \omega(g)$, $f \sim g$).

$$\begin{array}{cccccc} \log_2 n & 2^{n \log n} & n^2 & n^2 \log n & 2^n & \\ \log \log n^2 & n^2 + \log n & n^{\log n} & n^2(1 + (-1)^n)^n & & \end{array}$$

Aufgabe 8.3

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen ihre Mächtigkeit.

(a) $A := \{(s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k\}$.

(b) $B := \{(s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \dots < s_k\}$.

(c) $C := \{(s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k\}$.

(d) $D := \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \dots + s_k = n\}$.

(e) $E := \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \dots + s_k \leq n\}$.

(f) $F := \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \dots + s_k = n\}$.

(g) $G := \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \dots + s_k \leq n\}$.

Wird nicht besprochen, Lösung per Mail an Prof. Esparza

Aufgabe 8.1

Sei Σ ein Alphabet und $x, y, z \in \Sigma^*$ Wörter. Zeigen Sie:

- (a) Unter den Annahmen $x \neq \varepsilon$ und $zx = yz$ folgt, dass es Wörter $r, s \in \Sigma^*$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $x = sr$, $y = rs$ und $z = (rs)^k r$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach der Länge (Anzahl der Buchstaben) $|z|$ von z . Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $|z| \leq |x|$ und $|z| > |x|$.

- (b) Unter der Annahme $xy = yx$ folgt, dass es ein Wort $r \in \Sigma^*$ und Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x = r^m$ und $y = r^n$.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach der Länge $|xy|$ von xy und weiterhin die Behauptung aus (a) (unabhängig davon, ob Sie (a) gelöst haben oder nicht).