Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 9

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 18.12.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 9.1 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Eine binäre Relation $\prec \subseteq M \times M$ ist *wohlfundiert*, wenn es keine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Elementen aus M $a_{i+1} \prec a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Eine binäre Relation $\prec$ ist genau dann wohlfundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge $Q \subseteq M$ ein minimales Element m bzgl. $\prec$ besitzt (d.h. $m \in Q$ und $x \notin Q$ für jedes $x \in M$ mit $x \prec m$).

(b) Zeigen Sie: Falls $\prec$ wohlfundiert ist, so ist auch (1) $\prec^+$ wohlfundiert und (2) $\prec^*$ eine partielle Ordnung.

Aufgabe 9.2

Es sei Σ ein Alphabet, das zumindest die zwei verschiedenen Symbole a und b enthält.

Zeigen Sie mittels vollständiger oder wohlfundierter Induktion: Für jedes Wort $u \in \Sigma^*$ gilt $au \neq ub$.

Aufgabe 9.3

Es seien f, g, h Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Gilt $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in o(h(n))$, dann auch $f(n) \in o(h(n))$.

Aufgabe 9.4 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

In der Komplexitätstheorie definiert man verschiedene Klassen, um die Laufzeit von Algorithmen zu klassifizieren:

Sei $T_{\mathcal{A}}(n)$ die Zeit (gemessen z.B. in der Anzahl der ausgeführten Anweisungen), die ein Algorithmus $\mathcal{A}$ benötigt, bis er terminiert, wenn die Eingabe „Größe" n hat (gemessen z.B. in der Anzahl der Bits, die für die Codierung der Eingabe benötigt werden).

Man sagt, dass $\mathcal{A}$ in

- *subquadratischer Zeit* läuft, falls $T_{\mathcal{A}}(n) \in o(n^2)$. (Kurz: $T_{\mathcal{A}} \in \mathsf{SUBQ}$.)
- *polynomieller Zeit* läuft, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T_{\mathcal{A}}(n) \in O(n^k)$. (Kurz: $T_{\mathcal{A}} \in \mathsf{P}$.)
- *exponentieller Zeit* läuft, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T_{\mathcal{A}}(n) \in O(2^{n^k})$. (Kurz: $T_{\mathcal{A}} \in \mathsf{EXPTIME}$.)
- *subexponentielle Zeit* läuft, falls für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ gilt, dass $T_{\mathcal{A}}(n) \in O(2^{n^c})$. (Kurz: $T_{\mathcal{A}} \in \mathsf{SUBEXP}$.)

(a) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen an, ob sie in SUBQ, P, SUBEXP oder EXP liegt (es ist keine Begründung verlangt; eine Funktion kann in mehreren Klassen liegen):

$$n \cdot \log n, \quad n^{\log n}, \quad n^2 \cdot 2^{n^{\log n}}, \quad n!$$

(b) Zeigen Sie anhand der Definition, dass $2^{(\log_2 n)^{\log_2 \log_2 n}} \in \mathsf{SUBEXP}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $(\log_2 \log_2 n)^2 \in o(\log_2 n)$.

Aufgabe 9.5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Wie viele Wörter der Länge ...

(a) genau 5 gibt es?

(b) genau 6 gibt es, so dass jedes a vor jedem b kommt, und jedes b vor jedem c kommt?

(c) genau 10 gibt es, in denen genau 5-mal ein a, 3-mal ein b und 2-mal ein c vorkommt?

(d) genau 8 gibt es, in denen genau 6-mal ein a vorkommt? (Die Anzahl der bs und cs ist nur durch die Länge beschränkt.)

(e) genau 7 gibt es, in denen jedes Zeichen mindestes einmal vorkommt?

(f) höchstens 6 gibt es?

(g) höchstens 9 gibt es, in denen höchstens 3-mal ein a vorkommt?

(h) höchstens 10 gibt es, in denen mindestens 4-mal ein a vorkommt?

(i) höchstens 7 gibt es, in denen die Summe der Vorkommen von bs und cs genau 4 beträgt?

(j) höchstens 9, aber mindestens 2 gibt es, mit mindestens einem a, aber höchstens 3 Vorkommen von b?

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 16.12.2013

Aufgabe 9.1

Sei $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\sim$ eine Äquivalenzrelation über $[n]$. $[n]/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Wir ordnen $[n]/\sim$ den Vektor $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$ zu, wobei λ_i gerade angibt, wieviele der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ genau i Elemente enthalten.

Beispiel: Sei $n = 3$. Für $M/\sim_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ergibt sich $(3, 0, 0)$; für $M/\sim_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ergibt sich $(1, 1, 0)$.

(a) Bestimmen Sie für $n = 5$ und jeden Vektor $\vec{\lambda} \in \mathbb{N}_0^5$, wie viele Äquivalenzrelationen über $[n]$ den Vektor $\vec{\lambda}$ zugeordnet bekommen.

(b) Geben Sie eine Funktion in Abhängigkeit von n und $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ an, welche die Anzahl der $\vec{\lambda}$ zugeordneten Äquivalenzrelationen über $[n]$ angibt.

Aufgabe 9.2 Doppeltes Abzählen

Wir betrachten ein Straßennetz mit n Ortschaften $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ und einer gewissen Menge S von Straßen. Eine Straße aus S verbindet stets genau zwei Ortschaften. Für jede Ortschaft o ist die Anzahl $s(o)$ der Ortschaften bekannt, mit denen o durch eine Straße aus S verbunden ist. (Alle Straßen sind in beide Richtungen befahrbar, d.h. „verbunden" ist eine symmetrische Relation.)

Bestimmen Sie $|S|$ in Abhängigkeit von n und $s(\cdot)$.

Aufgabe 9.3 Doppeltes Abzählen

Wir betrachten ein gleichmässiges 128-Eck, wobei genau 11 Ecken rot, die restlichen 118 Ecken blau eingefärbt sind.

Zeigen Sie, dass es mindestens eine Drehung des 128-Ecks gibt, so dass alle roten Ecken auf Positionen von blauen Ecken überführt werden.

Aufgabe 9.4 Schubfachprinzip

Zeigen Sie: In jeder $n + 1$-elementigen Teilmenge A von $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ gibt es zwei Zahlen $x, y \in A$, so dass x ein Teiler von y ist.

Aufgabe 9.5 Schubfachprinzip

Zeigen Sie: Egal, wie man 23 Springer auf einem Schachbrett positioniert, es gibt stets 12 Springer, die sich nicht bedrohen.