Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 5

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 20.11.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 5.1

Zeigen Sie, dass folgende Formeln semantisch äquivalent sind, indem Sie schrittweise die Formel auf der linken Seite unter Verwendung der Äquivalenzen aus der VL (Folien 89,90,91 in Aussagenlogik I) in die Formel auf der rechten Seite transformieren. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendte Äquivalenz an.

(a) $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \leftrightarrow B)$

(b) $((A \wedge (B \rightarrow C)) \vee (\neg A \wedge C)) \equiv ((A \wedge \neg B) \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg B)))$

Aufgabe 5.2

Es sei $F := ((A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow (A \vee B)))$.

Erinnerung: Eine Formel F ist in KNF (konjunktiver Normalform), falls F – unter Ausnutzung der Assoziatitiväten – von der Gestalt $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}$ ist, wobei es sich bei den $L_{i,j}$ um Literale handelt (siehe auch Folie 3 in Aussagenlogik II).

Entsprechend sagt man, dass F in DNF (disjunktiver Normalform) ist, falls F von der Gestalt $\bigvee i = 1^n \bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}$.

(a) Konstruktion von KNF und DNF mittels der Wahrheitstabelle:

  (i) Stellen Sie die Wahrheitstabelle zu F auf.

  (ii) Lesen Sie aus der Tabelle aus (a) eine zu F semantisch äquivalente Formel in DNF ab.

  Hinweis: In der VL wurde mit derselben Methode der ITE-Operator mit Hilfe von $\neg, \wedge, \vee$ dargestellt, siehe Folie 103 in Aussagenlogik I.

  (iii) Lesen Sie aus der Tabelle aus (a) eine zu $\neg F$ semantisch äquivalente Formel in DNF ab.

  (iv) Geben Sie mit Hilfe des Resultats aus (a-iii) eine zu F semantisch äquivalente Formel in KNF an.

(b) Verwenden Sie nun das auf den Folien 6 und 7 in Aussagenlogik II beschriebene Verfahren, um mit Hilfe von semantischen Äquivalenzen, eine gegebene Formel in KNF zu überführen. Geben Sie wie immer bei jedem Umformungsschritt die verwendete Äquivalenz an:

  (i) Formen Sie F in eine semantisch äquivalente Formel in KNF um.

  (ii) Formein Sie $\neg F$ in eine semantisch äquivalente Formel in KNF um.

  (iii) Formen Sie F in eine Formel in DNF um unter Verwendung von (b-ii).

Aufgabe 5.3

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf folgende Klauselmenge an, um zu entscheiden, ob diese erfüllbar ist, und ggf. eine erfüllende Belegung zu bestimmen.

$$\{\{A, B, C\}, \{\neg A, C, D\}, \{\neg A, C, \neg D\}, \{\neg A, \neg C, D\}, \{\neg A, \neg C, \neg D\}, \{A, B, \neg C\}, \{A, \neg B, C\}\}$$

Hinweis: Bei der Wahl des Literals für die Anwendung der OLR (one-literal-rule) bzw. der Fallunterscheidung, verwenden Sie bitte dieselbe Variablenordnung wie in den Tutorübungen:

Das Literal L kommt vor dem Literal L' (kurz: $L \prec L'$), falls

- beide Literale von derselben Variablen abgeleitet sind, wobei L das positive und L' das negative Literal ist (Bsp.: $p \prec \neg p$); oder
- beide Literale von verschiedenen Variablen abgeleitet sind, die Variable zu L aber in der lexikographischen Ordnung vor der Variablen zu L' kommt (Bsp.: $\neg p \prec q$).

Hat der DPLL-Algorithmus die Wahl zwischen mehreren Literalen, so soll stets das Literal gewählt werden, dass bzgl. der beschriebenen Ordnung $\prec$ vor allen anderen zur Auswahl stehenden Literalen kommt.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 18.11.2013

Aufgabe 5.1

Entscheiden Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Formeln allgemeingültig sind:

(a) $F := ((\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B)$.

(b) $G := ((A \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge \neg D) \vee \neg A)$.

Aufgabe 5.2

Sei F eine Formel in Klauselmengendarstellung.

Eine Resolution $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ der leeren Klausel heißt *linear*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $K_0 \in F$.
- K_n ist die leere Klausel.
- Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt:

  Es gibt eine Klausel $B_{i-1} \in F \cup \{K_0, K_1, \ldots, K_{i-1}\}$, so dass K_i ein Resolvent von K_{i-1} und B_{i-1} ist.

Sei $F = \{\{A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$.

(a) Geben Sie eine lineare Resolution der leeren Klausel mit $K_0 = \{A, B\}$ an.

(b) Gibt es eine kürzere (nicht lineare) Resolution der leeren Klausel?

Bemerkung: Die Länge einer Resolution sei die Anzahl ihrer Resolutionsschritte.

Aufgabe 5.3

Ein Logikkalkül $\mathcal{K}$ ist eine Menge von *Inferenzregeln*, wobei jede Inferenzregel beschreibt, wie man rein *syntaktisch* aus bereits bewiesenen bzw. angenommenen Aussagen (Formeln) weitere Aussagen konstruiert (ableitet). Man schreibt dabei kurz $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$, um zu sagen, dass sich F aus den Annahmen Γ allein unter den Regeln aus $\mathcal{K}$ ableiten lässt. Gilt $\Gamma = \emptyset$, so schreibt man kurz $\vdash_{\mathcal{K}} F$.

Wir betrachten im Folgenden zwei verschiedene Kalküle für die Aussagenlogik:

(a) Wir schreiben kurz Nat für das Kalkül des natürlichen Schließens (siehe Folien 53 bis 61 in Aussagenlogik II).

Zeigen hiermit:

(i) $\vdash_{\text{Nat}} ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

(ii) $\vdash_{\text{Nat}} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

(b) Das Frege-Lukasiewicz-Kalkül FL kommt mit einer geringeren Anzahl an Inferenzregeln aus als das Kalkül des natürlichen Schließens, beschränkt sich dafür aber syntaktisch auf Formeln, die mit Hilfe der Basis $\{\rightarrow, \neg\}$ dargestellt werden:

- $\vdash (F \rightarrow (G \rightarrow F))$
- $\vdash ((F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)))$
- $\vdash ((\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow F))$
- $(F \rightarrow G), F \vdash G$

F, G, H stehen dabei für beliebige aussagenlogische Formeln.

Beweise in FL sind im Allgemeinen sehr lang. Wir erlauben daher auch noch die Substitutionsregel im Folgenden:

Gilt $\vdash_{\mathrm{FL}} F$, so auch $\vdash_{\mathrm{FL}} G$, solange G durch Substitution aus F hervorgeht

(i) Geben Sie für den folgenden Beweis von $\vdash_{\mathrm{FL}} ((G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$ bei jedem Schritt die verwendete Regel samt der zugehörigen Substitution an:

- $\vdash_{\mathrm{FL}} ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} (((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))) \to ((G \to H) \to ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} ((G \to H) \to ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} (((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))) \to (((G \to H) \to ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))) \to (((G \to H) \to (F \to (G \to H))) \to ((G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H))))))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} (((G \to H) \to ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))) \to (((G \to H) \to (F \to (G \to H))) \to ((G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H)))))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} (((G \to H) \to (F \to (G \to H))) \to ((G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H))))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} ((G \to H) \to (F \to (G \to H)))$
- $\vdash_{\mathrm{FL}} ((G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$

Zeigen Sie:

(ii) $\vdash_{\mathrm{FL}} (F \to F)$

(iii) $(F \to G), (G \to H) \vdash_{\mathrm{FL}} (F \to H)$

Wird nicht besprochen, Lösung per Mail an Prof. Esparza

Aufgabe 5.1

Es sei F eine unerfüllbare Formel. Es sei weiterhin $\mathcal{R}_1$ ein Resolution der leeren Klausel für $F[p/\mathrm{true}]$; entsprechend sei $\mathcal{R}_0$ eine Resolution der leeren Klausel für $F[p/\mathrm{false}]$.

Geben Sie ein Verfahren an, das aus $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_0$ eine Resolution der leeren Klausel für F konstruiert.