

Diskrete Strukturen – Aufgabenblatt 7

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 04.12.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 7.1

Sie können die in TA 6.1 definierten Formeln *Refl*, *Sym*, *Asym*, *Antisym*, *Trans* in dieser Aufgabe verwenden.

Im Folgenden sei $\preceq \subseteq U \times U$ eine binäre Relation und $\mathcal{M} \subseteq U$ eine Menge.

- (a) Formalisieren Sie, dass eine binäre Relation \preceq eine partielle Ordnung ist.
- (b) Formalisieren Sie, dass eine binäre Relation \preceq eine totale Ordnung ist.
- (c) Es sei \preceq eine partielle Ordnung, \mathcal{M} eine Menge und $m \in \mathcal{M}$. Dann heißt m *minimales Element* von \mathcal{M} , falls es kein von m verschiedenes Element $x \in \mathcal{M}$ mit $x \preceq m$ gibt; m heißt *kleinstes Element* von \mathcal{M} , falls $m \preceq x$ für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt.
Formalisieren Sie die beiden Begriffe *minimales Element* und *kleinstes Element* ohne Verwendung der Gleichheit „=“.
- (d) Formalisieren Sie, dass eine binäre Relation \preceq eine partielle Ordnung ist, bezüglich welcher es ein global kleinstes Element gibt.
- (e) Formalisieren Sie die Behauptung, dass bzgl. einer gegebenen partiellen Ordnung eine gegebene Menge höchstens ein kleinstes Element besitzt.

Aufgabe 7.2

Geben Sie eine „Tarski-Welt“ (ein Modell) an, welche alle der folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\exists x \exists y \exists z (Triangle(x) \wedge Triangle(y) \wedge Square(z) \wedge Between(z, x, y))$ (1)
- $\forall x \forall y ((Triangle(x) \wedge Square(y)) \rightarrow (\neg SameCol(x, y) \wedge \neg SameRow(x, y)))$ (2)
- $\forall x (LeftOf(a, x) \vee x = a)$ (3)
- $Triangle(a) \wedge Medium(a)$ (4)
- $Square(b) \wedge Large(b) \wedge \neg SameCol(b, c)$ (5)
- $\forall x (Square(x) \rightarrow (SameCol(x, b) \vee SameRow(x, b)))$ (6)
- $\forall x \forall y ((Square(x) \wedge Square(y)) \rightarrow (x = y \vee \neg SameSize(x, y)))$ (7)
- $\exists x (Triangle(x) \wedge \forall y (LeftOf(y, x) \vee x = y))$ (8)
- $\forall x \forall y ((Triangle(x) \wedge Triangle(y) \wedge \neg x = y) \rightarrow (\neg SameCol(x, y) \wedge \neg SameRow(x, y)))$ (9)
- $\exists x (Pentagon(x) \wedge Medium(x) \wedge \neg SameCol(b, x) \wedge \exists y (Square(y) \wedge SameRow(x, y)))$ (10)

Hinweis: Sie können unter <http://courses.cs.washington.edu/courses/cse590d/03sp/tarski/tarski.html> Ihre Lösungen überprüfen.

Aufgabe 7.3

Nehmen Sie an, dass jedes Dreieck in Tarski's World jeweils eine „Dame“ (Schachfigur) darstellt.

Geben Sie dann eine Formel an, die aussagt, dass es acht Damen gibt, wobei sich keine der Damen gegenseitig bedrohen.

Hinweis: Überprüfen Sie Ihre Lösung mittels <http://courses.cs.washington.edu/courses/cse590d/03sp/tarski/tarski.html>.

Aufgabe 7.4 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebenen semantische Äquivalenz gilt.

Falls die Formeln äquivalent sind, so beweisen Sie dies, indem Sie die Formeln mit Hilfe der auf Folie 45 (Prädikatenlogik) und Folien 89-91 (Aussagenlogik I) angegebenen semantischen Äquivalenzen in eine gemeinsame Formel schrittweise überführen. In jedem Schritt muss die verwendete Äquivalenz angegeben werden.

Falls die Formeln nicht äquivalent sind, so geben Sie eine zu beiden Formeln passende Struktur an, die genau für eine der beiden ein Modell ist. Geben Sie weiterhin in diesem Fall an, ob eine der beiden Formeln eine Folgerung der anderen ist.

- (a) $\neg\forall x\exists y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(P(x,y) \wedge \neg\exists yQ(x,y)))$.
- (b) $\exists x\forall y(\neg(x=y) \rightarrow (R(x) \wedge \neg R(y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(R(x) \wedge \forall y(\neg(x=y) \rightarrow \neg R(y)))$.

Aufgabe 7.5 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln, ob diese allgemeingültig ist. Falls ja, beweisen Sie dies formal mittels Äquivalenzumformungen und unter Verwendung der Semantik; falls nein, geben Sie eine passende Struktur an, die kein Modell ist.

- (a) $(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists yP(y) \rightarrow \exists zQ(z)))$.
- (b) $((\exists xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \rightarrow Q(z)))$.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 02.12.2013

Aufgabe 7.1

- (a) In TA 6.4 haben Sie gesehen, dass $(\forall x(F \rightarrow G) \rightarrow (\forall xF \rightarrow \forall yG))$ allgemeingültig ist.

Zeigen Sie nun $\vdash (\forall x(F \rightarrow G) \rightarrow (\forall xF \rightarrow \forall yG))$ im Kalkül des natürlichen Schließens (siehe Folien 46ff (Prädikatenlogik) und Folien 56ff (Aussagenlogik II)).

- (b) Ebenfalls in TA 6.4 haben Sie gesehen, dass $((\forall xF \rightarrow \forall xG) \rightarrow \forall x(F \rightarrow G))$ nicht gültig ist.

Wo liegt der Fehler in folgender Ableitung? Geben Sie bei jedem Ableitungsschritt die verwendete Regel an – soweit möglich.

$$\begin{array}{c}
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G) \vdash (\forall xF \rightarrow \forall xG)} \\
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G) \vdash F[x/a] \rightarrow \forall xG} \\
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G), F[x/a] \vdash \forall xG} \\
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G), F[x/a] \vdash G[x/a]} \\
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G) \vdash F[x/a] \rightarrow G[x/a]} \\
\overline{(\forall xF \rightarrow \forall G) \vdash \forall x(F \rightarrow G)} \\
\vdash ((\forall xF \rightarrow \forall G) \rightarrow \forall x(F \rightarrow G))
\end{array}$$

Aufgabe 7.2

Verwenden Sie vollständige Induktion, um zu zeigen, dass Sie mit n geraden Schnitten eine Pizza in maximal $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ Stücke zerteilen können.

Aufgabe 7.3

Verwenden Sie vollständige Induktion, um zu zeigen, dass Sie im Spiel „Türme von Hanoi“ bei n Scheiben in maximal $2^n - 1$ Zügen gewinnen können.

Aufgabe 7.4

Ist folgender Induktionsbeweis korrekt?

Behauptung: In jeder endlichen Menge von Pferden haben alle Pferde dieselbe Fellfarbe.

- *Induktionsanfang:* In jeder einelementigen Menge von Pferden hat jedes Pferde dieser Menge offensichtlich dieselbe Fellfarbe wie jedes andere Pferd dieser Menge.
- *Induktionsannahme:* In jeder $(n - 1)$ -elementigen Menge von Pferden haben alle Pferde dieser Menge dieselbe Fellfarbe.
- *Induktionsschritt:* Sei M eine beliebige Menge von genau n Pferden. Wir nummerieren die Pferde von 1 bis n . Sei A die Menge der Pferde mit den Nummern 1 bis $n - 1$; entsprechend sei B die Menge der Pferde mit den Nummern 2 bis n . Nach Induktionsannahme haben alle Pferde aus A bzw. aus B dieselbe Fellfarbe. Insbesondere müssen also die Pferde 1 und n dieselbe Fellfarbe wie die Pferde 2 bis $n - 1$ haben. Somit haben auch alle Pferde aus M dieselbe Fellfarbe. \square .