Technische Universität München (I7) **Winter 2013/14**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger **7. Januar 2014**

Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 11

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 15.01.2014 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 11.1

Sei $\varphi(n) = |\{k \in [n] \mid \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}|$ die Anzahl der Zahlen aus $[n]$, welche zu n teilerfremd sind. Seien weiterhin $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen, die n teilen.

Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion, dass

$$\varphi(n) = n(1 - p_1^{-1})(1 - p_2^{-1}) \cdots (1 - p_k^{-1}).$$

Betrachten Sie hierfür die Mengen $A_I = \{k \in [n] \mid \forall i \in I : \frac{k}{p_i} \in \mathbb{N}\}$ für $I \subseteq [k]$.

Hinweis: Stellen Sie $\varphi(n)$ mit Hilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion zunächst als eine Summe dar. Multiplizieren Sie dann $n(1 - p_1^{-1})(1 - p_2^{-1}) \cdots (1 - p_k^{-1})$ aus. Zeigen Sie schließlich die Gleichheit.

Aufgabe 11.2

Bestimmen Sie mit Hilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion die Anzahl der Zahlen ≤ 1000, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind.

Aufgabe 11.3 (a) und (b) werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

In einem Fahrstuhl befinden sich 8 Personen. Der Fahrstuhl hält auf insgesamt 4 Stockwerken, wobei jeder Fahrgast auf einem der Stockwerke aussteigt und keine neuen Fahrgäste hinzusteigen.

(a) Wir unterscheiden nicht zwischen den Fahrgästen.

  (i) Geben Sie eine formale Beschreibung der Menge, welche gerade alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

  (ii) Wie viele Elemente enthält die Menge?

  (iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen genau 4 Fahrgäste im zweiten Stock aussteigen?

(b) Wir unterscheiden nun zwischen den Fahrgästen.

  (i) Beschreiben Sie wieder formal die Menge, die alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

  (ii) Bestimmen Sie wieder die Mächtigkeit der gesuchten Menge.

  (iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen auf jedem Stockwerk mindestens ein Fahrgast aussteigt?

Aufgabe 11.4 (i), (ii), (iii) werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$(i) \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad (ii) \sum_{0 \leq k \leq n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k} = \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}, \quad (iii) \sum_{0 \leq k \leq n} \left[{k \atop m} \right] n^{\underline{n-k}} = \left[{n+1 \atop m+1} \right]$$

Aufgabe 11.5

Sei $A_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n-k}{k}$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass $A_{n+2} = A_{n+1} - A_n$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 11.6 **(a), (b) und (c) werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Mit $\mathcal{S}_n$ sei die Menge der Permutationen von $[n]$ bezeichnet. Für $\pi \in \mathcal{S}_n$ sei $A(\pi) = |\{x \in [n-1] \mid \pi(x) < \pi(x+1)\}|$ die Anzahl der „Anstiege" von π. Schließlich sei $A_{n,k} = |\{\pi \in \mathcal{S}_n \mid A(\pi) = k\}|$ die Anzahl aller Permutationen von $[n]$, die genau k Anstiege haben.

(a) Bestimmen Sie $A_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 5$.

(b) Zeigen Sie: $A_{n,k} = A_{n,n-1-k}$ für $n > 0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(c) Zeigen Sie: $A_{n,k} = (n-k) \cdot A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k}$ für $n > 0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Sei π eine Permutation von $[n]$. Man kann aus π eine Permutation π' von $[n-1]$ erzeugen, indem man aus der Wertefolge $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ den Wert n streicht und π' gerade durch die so erhaltene Wertefolge definiert. Überlegen Sie sich zunächst, wie sich hierbei beim Übergang von π nach π' die Anzahl der Anstiege verändern kann.

Beispiel: Sei $\pi \in \mathcal{S}_5$ mit $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5)) = (3, 2, 5, 4, 1)$. Dann erhält man durch Streichen von 5 die Permutation $\pi' \in \mathcal{S}_4$ mit $(\pi'(1), \pi'(2), \pi'(3), \pi'(4)) = (3, 2, 4, 1)$. Offensichtlich gilt $A(\pi) = A(\pi') = 1$.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 13.01.2014

Aufgabe 11.1

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, endlicher Graph mit $\deg(v) \geq 4$ für alle $v \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass $|E| \geq 2\,|V|$ gilt.

(b) Zeigen Sie induktiv, dass für alle $n \geq 5$ ein 4-regulärer (d.h. $\forall v \in V\colon \deg(v) = 4$) Graph mit $|V| = n$ Knoten existiert.

Aufgabe 11.2

Notation: Für V eine Menge sei $\binom{V}{2}$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, endlicher Graph. Das Komplement von G ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$, d.h. eine Kante existiert in G genau dann, wenn sie nicht in $\overline{G}$ existiert.

Zeigen Sie: Zumindest einer der beiden Graphen $G, \overline{G}$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 11.3

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, endlicher, zusammenhängender Graph. Sei l_G die Länge eines längsten Pfades.

Zeigen Sie: Sind $(v_0, v_1, \ldots, v_{l(G)})$ und $(w_1, w_2, \ldots, w_{l(G)})$ zwei Pfade maximaler Länge l_G in G, dann treffen sich die beiden Pfade in mindestens einem Knoten.

Erinnerung: Ein Pfad ist ein Weg, der jeden Knoten höchstens einmal besucht.

Aufgabe 11.4 **Nur falls Prüfercode am 9.1. in der VL behandelt wurde**

(a) Bestimmen Sie den Prüfercode des Baums mit $V = [7]$ und $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}\}$.

(b) Bestimmen Sie den Baum mit dem Prüfercode $8, 5, 4, 8, 4, 5$.