Lösung

Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 8

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 11.12.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 8.1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $3^{2n} + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 8 (ohne Rest) teilbar ist.

Lösung:

- *Induktionsanfang*: Für $n = 0$ ergibt sich $3^0 + 7 = 1 + 7 = 8$, was offensichtlich durch 8 teilbar ist.
- *Induktionsschritt*: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest.

  Induktionsvoraussetzung: Für das gegebene n gelte $8 \mid 3^{2n} + 7$.

  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $8 \mid 3^{2(n+1)} + 7$.

  Beweis: Umformung liefert

$$\begin{aligned} & 3^{2(n+1)} + 7 \\ = \; & 3^{2n+2} + 7 \\ = \; & 9 \cdot 3^{2n} + 7 \\ = \; & (3^{2n} + 7) + 8 \cdot 3^{2n} \end{aligned}$$

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $8 \mid 3^{2n} + 7$. Offensichtlich gilt auch $8 \mid 8 \cdot 3^{2n}$. Damit folgt die Induktionsbehauptung.

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ ergibt sich für die linke Seite $\sum_{k=1}^{1}(3k-2) = 3 - 2 = 1$. Für die rechte Seite ergibt sich $\frac{1\cdot(3-1)}{2} = 1$.
- *Induktionsschritt*: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest.

  Induktionsvoraussetzung: Für das gegebene n gelte $\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$.

  Beweis: Umformen der linken Seite unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung liefert:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) = (3(n+1)-2) + \sum_{k=1}^{n}(3k-2) \overset{IV}{=} 3(n+1) - 2 + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{6n+2+3n^2-n}{2} = \frac{3n^2+5n+2)}{2}$$

  Für die rechte Seite folgt durch Ausmultiplizieren

$$\frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n+2)}{2}$$

  Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 8.3 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Es sei weiterhin $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der Goldene Schnitt.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass (1) $\Phi^2 = 1 + \Phi$, (2) $\Phi^{-2} = 2 - \Phi$ und (3) $1 - \Phi = -\Phi^{-1}$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right).$$

Hinweise: Beachten Sie, dass Sie für den Induktionsschritt Annahmen über sowohl f_{n-1} als auch f_{n-2} getroffen werden müssen. Entsprechend muss der Induktionsanfang angepasst werden!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \tfrac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \tfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi \\
\Phi^{-2} &= \tfrac{1}{1+\Phi} = \tfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \tfrac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 - \Phi \\
-\Phi^{-1} &= \tfrac{-2}{1+\sqrt{5}} = \tfrac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi
\end{aligned}$$

- *Induktionsanfang*:

  Fall $n = 0$: Für die linke Seite gilt nach Definition $f_0 = 0$.

  Für die rechte Seite ergibt sich $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^0 - (-\Phi)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$.

  Fall $n = 1$: Für die linke Seite gilt nach Definition $f_1 = 1$.

  Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^1 - (-\Phi)^{-1}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi - (-\Phi)^{-1}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi - (1-\Phi)\right) \\
= \;&\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \sqrt{5} - 1\right) = 1
\end{aligned}$$

- *Induktionsschritt*: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest.

  Induktionsvoraussetzung: Für das gegebene n gelte $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right)$.

  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-(n+1)}\right)$.

  Beweis: Umformen der linken Seite unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung liefert:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1} - (-\Phi)^{-(n-1)}\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}(\Phi+1) - (-\Phi)^{-(n-1)}(-\tfrac{1}{\Phi}+1)\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}\Phi^2 - (-\Phi)^{-(n-1)}(1-\Phi+1)\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}\Phi^2 - (-\Phi)^{-(n-1)}\Phi^{-2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}\Phi^2 - (-\Phi)^{-(n-1)}(-\Phi)^{-2}\right) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - (-\Phi)^{-(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

  Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 8.4 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Wir betrachten zwei Varianten der „Türme von Hanoi”. Stets gilt, dass zu Beginn alle Scheiben ganz links liegen und mit Hilfe der mitteleren Position nach ganz rechts bewegt werden müssen, wobei nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe liegen darf. Es gelte jeweils $n \in \mathbb{N}$.

(a) Variante 1: Zu Beginn liegen $2n$ Scheiben auf dem linken Stift, wobei es von jeder Größe genau 2 Scheiben gibt.

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass man mit höchstens $2^{n+1} - 2$ Zügen alle Scheiben nach rechts bewegen kann.

(b) Variante 2: Wie in Variante gibt es $2n$ Scheiben, je zwei von jeder Größe, allerdings sind die Scheiben nun von unten beginnend abwechselnd rot (unterste Scheibe) und weiß eingefärbt. Ziel ist es nun, den Stapel so von links nach rechts zu bewegen, dass am Schluss wieder die Scheiben von unten beginnend abwechselnd rot (unterste Scheibe) und weiß eingefärbt sind.

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass man mit höchstens $2^{n+2} - 5$ Zügen die Aufgabe lösen kann.

Hinweis: Verwenden Sie geeignet das Resultat aus (a).

Lösung:

(a) Sei A_n die Anzahl der Züge, die man mindestens benötigt. Dann ist zu zeigen, dass $A_n \leq 2^{n+1} - 2$ für alle $n \in \mathbb{N}0$.

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ kann man offensichtlich in $2 = 2^2 - 2$ Zügen das Problem lösen.
- *Induktionsschritt*: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

  Induktionsvoraussetzung: Für das gegebene n gelte $A_n \leq 2^{n+1} - 2$.

  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $A_{n+1} \leq 2^{(n+1)+1} - 2$.

  Beweis:

  Phase I: Man zunächst die obersten $2n$ Scheiben von links in die Mitte. Dabei verbleiben die beiden größten Scheiben die ganze Zeit links, so dass man das Problem in A_n Zügen lösen kann.

  Phase II: Dann bringt man die beiden links verbliebenen Scheiben nach rechts. (2 Züge.)

  Phase III: Analog zu Phase I bringt man alle $2n$ Scheiben aus der Mitte nach rechts. (A_n Züge.)

  Mittels dieser Strategie löst man die Aufgabe in $2A_n + 2$ Zügen. Somit gilt $A_{n+1} \leq 2A_n + 2$.

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $A_n \leq 2^{n+1} - 2$.

  Damit folgt $A_{n+1} \leq 2A_n + 2 \leq 2 \cdot (2^{n+1} - 2) + 2 = 2 \cdot 2^{n+1} - 4 + 2 = 2^{n+2} - 2$, was zu zeigen war.

(b) Sei B_n die Anzahl der Züge, die man mindestens benötigt. Dann ist zu zeigen, dass $B_n \leq 2^{n+2} - 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ kann man offensichtlich in $3 = 2^3 - 5$ Zügen das Problem lösen: Man bringt die weiße Scheibe in die Mitte, dann die rote nach rechts, schließlich die weiße von der Mitte nach rechts.
- *Induktionsschritt*: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

  Induktionsvoraussetzung: Für das gegebene n gelte $B_n \leq 2^{n+2} - 5$.

  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $B_{n+1} \leq 2^{(n+1)+2} - 5$.

  Beweis:

  Phase I: Man bringt zunächst die obersten $2n$ Scheiben von links nach rechts unter Verwendung der Strategie aus (a). (A_n Züge.) Dabei wird u.U. das Muster zerstört, aber das ist erstmal egal.

  Phase II: Man bringt die beiden Scheiben von links in die Mitte (2 Züge). Jetzt liegt rot auf weiß in der Mitte.

  Phase III: Man bringt die $2n$ Scheiben von rechts zurück nach links. Hierfür kann man einfach die Züge aus Phase I in der umgekehrten Reihenfolge abspielen, sodass die $2n$ Scheiben wieder korrekt sortiert sind! (A_n Züge.)

  Phase IV: Man bringt die 2 großen Scheiben von der Mitte nach rechts, hierbei dreht sich die Reihenfolge wieder um, so dass weiß auf rot liegt. (2 Züge.)

  Phase V: Man bringt die $2n$ Scheiben in B_n Zügen von links nach rechts.

  Mittels dieser Strategie löst man die Aufgabe in $B_n + 2A_n + 4$ Zügen. Somit gilt $B_{n+1} \leq B_n + 2A_n + 4$.

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $B_n \leq 2^{n+2} - 5$. Nach (a) gilt $A_n \leq 2^{n+1} - 2$.

  Damit folgt $B_{n+1} \leq B_n + 2A_n + 4 \leq 2^{n+2} - 5 + 2 \cdot (2^{n+1} - 2) + 4 = 2^{n+2} - 5 + 2^{n+2} - 4 + 4 = 2^{n+3} - 5$, was zu zeigen war.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 09.12.2013

Aufgabe 8.1

Eine binäre Relation $\prec \subseteq M \times M$ ist *wohlfundiert*, wenn es keine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ von Elementen aus M $a_{i+1} \prec a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Jede wohlfundierte Relation $\prec$ ist irreflexiv (d.h. es gibt kein $x \in M$ mit $x \prec x$).

(b) Wir definieren auf $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ die Relation $\prec := \{(a, b) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^2 \mid a < b \wedge a \mid b\}$.

Zeigen Sie, dass $\prec$ wohlfundiert ist.

Bemerkung: $a \mid b$ steht für „a teilt b".

(c) Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation über der Menge M und P eine Eigenschaft (Prädikat). Dann besagt das

$$\underline{\text{Prinzip der wohlfundierten Induktion}}: \quad \forall a \in M\colon P(a) \text{ gdw. } \forall a \in M\colon (\forall b \prec a\colon P(b) \to P(a))$$

In Worten: Um zu zeigen, dass jedes $a \in A$ die Eigenschaft P besitzt, zeige für jedes $a \in A$: Wenn alle b, die „kleiner" als a sind, bereits die Eigenschaft P besitzen, dann besitzt auch a die Eigenschaft P.

(i) Worin besteht der *Induktionsanfang* im Fall der wohlfundierten Induktion?

(ii) Wie ergibt sich die vollständige Induktion als Spezialfall der wohlfundierten Induktion?

(iii) Verwenden Sie das Prinzip der wohlfundierten Induktion bzgl. der in (a) definierten Relation, um zu zeigen:

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung, d.h. eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen $k, p_1, \dots, p_k, e_1, \dots, e_k$ mit (1) $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, (2) jedes p_i ist eine Primzahl und (3) $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$.

(d) In manchen Fällen erlaubt die Negation des Induktionsprinzips Beweise eleganter darzustellen:

Um zu zeigen, dass $\forall x \in M\colon P(x)$ gilt, nimmt man an, dass die Menge $A := \{x \in M \mid \neg P(x)\}$ nicht leer ist (d.h. man nimmt an, dass $\exists a \in M\colon \neg P(a)$ gilt). Dann wählt man aus A ein bzgl. $\prec$ minimales Element (d.h. $\forall b \in A\colon \neg(b \prec a)$) und leitet einen Widerspruch her.

(i) Überprüfen Sie, dass das Vorangegangene tatsächlich äquivalent zu $\neg\forall a \in M\colon (\forall b \prec a\colon P(b) \to P(a))$ ist.

(ii) Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen mit (1) $0 \in H$, (2) falls $x \in H$, dann auch $-x \in H$, (3) falls $x, y \in H$, dann auch $x + y \in H$. Wir nehmen weiter an, dass H neben der 0 noch mindestens ein weiteres Element enthält. Sei dann $m := \min\{x \in H \mid x > 0\}$.

Zeigen Sie: $H = \{m \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Lösung:

(a) Sei $\prec$ reflexiv. Dann ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i = x$ (mit $x \in M$ beliebig) eine Folge mit $a_{i+1} \prec a_i$. Somit kann $\prec$ nicht wohlfundiert sein.

(b) Die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ ist wohlfundiert: Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $a_{i+1} < a_i$, d.h. $a_{i+1} \leq a_i - 1$. Damit folgt induktiv, dass $a_n \leq a_1 - (n-1)$. Insbesondere also $a_{a_1+1} \leq 0$, womit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keine Folge in $\mathbb{N}$ sein kann. Widerspruch.

Da aus $a \prec b$ nach Definition $a < b$ folgt, muss auch $\prec$ wohlfundiert sein.

(c) (i) Für jedes Element a mit $\{b \in M \mid b \prec a\} = \emptyset$ muss man $P(a)$ direkt beweisen (insbesondere im Fall $\prec = \emptyset$).

(ii) Setze $\sqsubset := \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist $\sqsubset$ wohlfundiert (da $\sqsubset \subseteq <$ und $<$ wohlfundiert). Wohlfundierte Induktion nach $\sqsubset$ bedeutet dann: Zeige jedes n unter der Annahme, dass bereits alle m aus $\{m \in \mathbb{N} \mid m \sqsubset n\}$ bereits die Eigenschaft P haben, dass auch n die Eigenschaft P besitzt. Nun gilt nach Definition $\{m \in \mathbb{N} \mid m \sqsubseteq n\} = \{n-1\}$, falls $n > 0$; bzw. $\{m \in \mathbb{N} \mid m \sqsubset n\} = \emptyset$, falls $n = 0$. Für $n = 0$, muss man also direkt zeigen, dass $P(0)$ gilt; für $n > 0$ muss man $P(n)$ zeigen unter der Annahme, dass $P(n-1)$ gilt. Das ist gerade die vollständige Induktion.

(iii) Nach (b) ist das gegeben $\prec$ wohlfundiert. Es gilt $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 2 \wedge m \prec n\} = \emptyset$ genau dann, wenn der einzige Teiler von n, der kleiner als n ist, auch kleiner als 2 ist, d.h. wenn n eine Primzahl ist.

Man überlegt sich nun, dass jede Primzahl p eine eindeutige Primzahlzerlegung mit $k = 1$, $p_1 = p$ und $e_1 = 1$ besitzt.

Sei $n \geq 2$ beliebig, aber fest. Ohne Einschränkung ist n keine Primzahl (den Fall haben wir bereits bewiesen). Dann gibt es eine größte Primzahl p mit $p \mid n$ (würde es die nicht geben, wäre n die 1, was aber wegen $n \geq 2$ nicht der Fall sein kann). Da n keine Primzahl ist, gilt $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ und $\frac{n}{p} \geq 2$. Insofern besitzt $\frac{n}{p}$ eine Primzahlzerlegung $\frac{n}{p} = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Damit ist $p \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ eine Primzahlzerlegung von n. (Existenz)

Wir zeigen, dass diese Zerlegung eindeutig ist: Annahme $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} = q_1^{f_1} \cdot q_2^{f_2} \cdots q_l^{f_l}$ für geeignete Zahlen $e, f, p_1, q_1, \ldots$.

Da $p \mid n$, muss p sowohl unter den p_i als auch den q_j auftreten. Dann ergeben sich aber auch zwei verschiedene Zerlegungen für $\frac{n}{p}$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzen aber alls $m \prec n$, insbesondere $\frac{n}{p}$ eine eindeutige Zerlegung. Somit muss auch n eine eindeutige Zerlegung besitzen.

(d) (i)

$$\neg\forall a \in M\colon (\forall b \prec a\colon P(b) \to P(a)) \equiv \exists a \in M\colon \neg P(a) \wedge \forall b \prec a\colon P(b)$$

Nachdem Prinzip der wohlfundierten Induktion gilt somit $\neg\forall a \in M\colon P(a) \equiv \exists a \in M\colon \neg P(a)$ genau dann, wenn es ein $a \in M$ gibt, dass $\neg P(a)$ erfüllt, aber alle bzgl. $\prec$ „kleineren" b noch die Eigenschaft P besitzen. Das heißt, die Menge $\{b \in M \mid b \prec a\}$ ist disjunkt von $A = \{x \in M \mid \neg P(x)\}$. Somit gilt $\neg(b \prec a)$ für alle $b \in A$.

(ii) Setze $m\mathbb{Z} = \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Da $m \in H$ folgt auch $-m \in H$ und damit auch $0 = m + (-m) \in H$. Vollständige Induktion zeigt dann, dass jedes Vielfache von m bzw. $-m$ ebenfalls in H liegt. Somit folgt $m\mathbb{Z} \subseteq H$.

Es bleibt zu zeigen, dass $H \subseteq m\mathbb{Z}$, d.h. $\forall x \in H\colon m\mathbb{Z}$. Sei $x \in H \setminus m\mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung gilt $x > 0$, da mit x auch $-x$ nicht in $m\mathbb{Z}$ liegen kann. Wir wählen nun aus allen $\{x \in H \mid x > 0 \wedge x \notin m\mathbb{Z}\}$ das bzl. $<$ kleinste Element (das Minimum). Da $m = \min\{x \in H \mid x > 0\}$ muss $m < x$ gelten. Nun liegt aber auch $x' = x + (-m) \in H$ mit $0 < x' < x$. Damit muss x' in $m\mathbb{Z}$ liegen, also ein Vielfaches von m sein. Dann ist aber auch $x = x' + m$ ein Vielfaches von m. Widerspruch.

Aufgabe 8.2

Geben Sie für für die folgenden Funktionen jeweils an, in welcher Relation im Sinne der Landau-Notation stehen ($f \in O(g)$, $f \in o(g)$, $f \in \Theta(g)$, $f \in \Omega(g)$, $f \in \omega(g)$, $f \sim g$).

$$\begin{array}{lllll} \log_2 n & 2^{n \log n} & n^2 & n^2 \log n & 2^n \\ \log\log n^2 & n^2 + \log n & n^{\log n} & n^2(1+(-1)^n)^n & \end{array}$$

Lösung: Man beachte, dass alle Funktionen nur positive Werte für $n > 1$ annehmen. Damit kann man die Betragsstriche, die in den Definitionen aus der VL vorkommen, fallen lassen, indem man immer $n_0 > 1$ wählt.

Ohne Betragsstriche gilt: (1) $f \in O(g)$ gdw. $g \in \Omega(f)$ und (2) $f \in o(g)$ gdw. $g \in \omega(f)$, sodass man sich ω und Ω sparen kann.

Nach VL gilt (hier unter der Annahme, dass f, g nicht negative Werte annehmen, so dass man auf den Betrag verzichten kann):

- $f \in O(g)$ genau dann, wenn $\exists C > 0 \exists n_0 \forall n > n_0\colon f(n) \leq Cg(n)$.

  oder alternativ: $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f \in o(g)$ genau dann, wenn $\forall C > 0 \exists n_0 \forall n > n_0\colon f(n) < Cg(n)$ (man kann auch $\leq$ statt $<$ setzen, da es für alle $C > 0$ gelten muss).

  oder alternativ: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f \in \Theta(g)$ gdw. $f \in O(g)$ und $g \in O(f)$.
- $f \sim g$ gdw. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ (asymptotische Gleichheit).

  $f \sim g$ ist nicht dasselbe, wie $f \in o(g)$ und $g \in o(f)$ (letzteres ist nicht erfüllbar; siehe auch Folie 34 in Grundlagen: Wachstum).

  $f \sim g$ ist auch nicht äquivalent zu $f \in \Theta(g)$, z.B. $2n \in O(n)$ und $n \in O(n)$, also $n \in \Theta(2n)$, aber $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2 \neq 1$.

  Aus $f \sim g$ folgt aber $f \in \Theta(g)$.

  $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Wie in der VL gezeigt, folgt mit $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ auch $f \in O(h)$.

Entsprechend: $f \in o(g) \wedge g \in o(h) \to f \in o(h)$. Sogar: $f \in O(g) \wedge g \in o(h) \to f \in o(h)$. Die beiden Eigenschaften werden u.U. auf dem nächsten Blatt als HA zu beweisen sein, insofern bitte nicht behandeln.

Weiterhin gilt stets (1) $f \in O(f)$, (2) $f \notin o(f)$, (3) $f \sim f$ und (4) $o(g) \subseteq O(g)$, womit sich einige Beziehungen automatisch ergeben.

Notation: $f \leq_O g$ für $f \in O(g)$ und $f <_o g$ für $f \in o(g)$. ($\leq_O$ ist zwar transitiv und reflexiv, aber weder symmetrisch noch antisymmetrisch; $<_o$ ist nicht reflexiv.) $f =_O g$ für $f \in \Theta(g)$.

In der VL wurde erwähnt, dass $\log_2 \log_2 n <_o \log_2 n <_o (\log_2 n)^2 <_o (\log_2 n)^3 <_o \ldots <_o n$ gilt. Das $(\log_a n)^k <_o (\log_a n)^{k+1}$ folgt natürlich direkt, da für $n > a$ auch $\log_a n > 1$ gilt. Die Beziehung $\log_a \log_a n <_o \log_a n$ lässt sich z.B. mittles L'Hospital oder der Reihendarstellung von e^x zeigen. Mittels L'Hospital kann man auch zeigen, dass $n^k <_o e^n$ für beliebiges $k \in \mathbb{R}$. Nach Aussage von Prof. Esparza kennen die meisten Studenten jedoch nicht die Limes-Definition, weswegen man sich für die Tutorübung auf die Behauptung aus den Folien stützen sollte mit dem Verweis auf Analysis.

$$\log \log n^2 <_o \log_2 n <_o n^2 \sim n^2 + \log n <_0 n^2 \log n <_o n^{\log n} <_o 2^n <_o 2^{n \log n}$$

„Beweise":

- $\log \log n^2 = \log(2 \log n) = \log 2 + \log \log n$ und $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$. Folgt somit aus $\log \log n <_o \log n$.
- Das $\log_2 n \leq n$ für genügend großes n gilt, macht man sich z.B. klar mittels einer Zeichnung und der Konkavität des Logarithmus. Da $n <_o n^2$ gilt, folgt auch $\log_2 n <_o n^2$.
- Da $\frac{n^2+\log n}{n^2} = 1 + \frac{\log n}{n^2}$ und $\log n <_o n^2$, folgt $n^2 \sim n^2 + \log n$.
- $\frac{n^2}{n^2 \log n} = \frac{1}{\log n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- $n^2 \log n < n^3 < e^{3 \log n} < e^{(\log n)^2} = n^{\log n}$ für $\log n > 3$, also $n > e^3$.

  Insbesondere $e^{3 \log n - (\log n)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $3x - x^2 \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$.
- $\frac{n^{\log n}}{2^n} = e^{(\log n)^2 - n \log 2} = e^{n(\frac{(\log n)^2}{n} - \log 2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $(\log n)^2 <_o n$ nach VL.
- $\frac{2^n}{2^{n \log n}} = 2^{-n \log n(-1+\frac{1}{\log n})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $\frac{1}{\log n} < 1$ für genügend großes n.

$n^2(1 + (-1)^n)^n$ ist zu allen Funktionen unvergleichbar bis auf $2^{n \log n}$:

Offensichtlich gilt für ungerades n einfach: $n^2(1 + (-1)^n)^n = 0$; für gerades n gilt hingegen $n^2(1 + (-1)^n)^n = 2^{n+2 \log n}$.

Daher $n^2(1 + (-1)^n)^n <_o 2^{n \log n}$.

Aufgabe 8.3

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen ihre Mächtigkeit.

(a) $A := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k\}$.

(b) $B := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$.

(c) $C := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k\}$.

(d) $D := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(e) $E := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

(f) $F := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(g) $G := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

Lösung:

(a) $|A| = 0$ falls $k > n$, sonst $|A| = n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(b) $|B| = |A|/k! = \binom{n}{k}$. (Anzahl Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Bällen k zu wählen, wobei die Reihenfolge der Bälle keine Rolle spielt und jeder Ball höchstens einmal gezogen wird.)

(c) $|C| = \binom{k+(n-1)}{k}$: Wir wählen k Elemente aus $[n]$, wobei ein Element mehrmals gewählt werden darf und die Reihenfolge vernachlässigt wird.

Eine mögliche Illustration ist: Anstatt die gewählten Elemente aufsteigend aufzulisten, zählen wir, wie häufig ein Element gewählt wurde. D.h. wir bilden einen Vektor $(s_1, \ldots, s_k) \in I$ bijektiv auf einen Vektor $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\sum_{i\in[n]} r_i = k$ ab, wobei r_i gerade angibt, wie oft i in $(s_1, \ldots, s_k)$ auftritt. Siehe dann (j).

(d) $|D| = \binom{n+(k-1)}{n}$:

Wir kodieren die natürlichen Zahlen unär: $0 = \varepsilon, 1 = |, 2 = ||, 3 = |||, \ldots$. Dann entspricht ein Vektor $(s_1, s_2, \ldots, s_k) \in J$ einem Wort über dem Alphabet bestehend aus ',' und '|', wobei genau n-mal '|' und genau $k-1$-mal ',' vorkommt. Da die Kommata und Striche nicht unterschieden werden, müssen wir nur die n Positionen der Striche aus den $n + k - 1$ möglichen Positionen innerhalb des zu konstruierenden Wortes wählen. (Vorlesung verwendet $*$ und $|$.)

(e) $|E| = \binom{n+k}{n}$.

Wie in (d), nur dass wir künstlich ein s_{k+1} hinzufügen (ein k.tes Komma), welches die übrigen "Striche" abtrennt.

Andererseits gilt auch $|J| = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+(k-1)}{i}$ nach (j).

Als Nebenresultat folgt somit $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+(k-1)}{i} = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$.

(f) $|F| = \binom{(n-k)+(k-1)}{(n-k)} = \binom{n-1}{n-k}$; wie (d), nur dass wir je einen Strich auf jede Klasse zu Beginn verteilen.

(g) $|G| = \binom{(n-k)+k}{(n-k)} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; wie (e).

Wird nicht besprochen, Lösung per Mail an Prof. Esparza

Aufgabe 8.1

Sei Σ ein Alphabet und $x, y, z \in \Sigma^*$ Wörter. Zeigen Sie:

(a) Unter den Annahmen $x \neq \varepsilon$ und $zx = yz$ folgt, dass es Wörter $r, s \in \Sigma^*$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $x = sr$, $y = rs$ und $z = (rs)^k r$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach der Länge (Anzahl der Buchstaben) $|z|$ von z. Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $|z| \leq |x|$ und $|z| > |x|$.

(b) Unter der Annahme $xy = yx$ folgt, dass es ein Wort $r \in \Sigma^*$ und Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x = r^m$ und $y = r^n$.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktions nach der Länge $|xy|$ von xy und weiterhin die Behauptung aus (a) (unabhängig davon, ob Sie (a) gelöst haben oder nicht).