Übung 8: Induktion II & Landausymbole

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

10. Dezember 2013

Definition (Wohlfundierte Relation)

Eine Relation $\prec \subseteq A \times A$ heißt wohlfundiert, wenn keine unendlichen Folgen von Elementen $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$ existieren, sodass

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \dots$$

Jede Kette hat ein unteres Ende.

Beispiel

- $\prec_1 := \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\right\}$ ist wohlfundiert.
- $\prec_2 := \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\right\}$ ist nicht wohlfundiert.
- $\prec_3 := \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a < b\right\}$ ist nicht wohlfundiert.
- $\prec_4 := \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists x. x \text{ teilt } a \land x \text{ teilt } b\right\}$ ist nicht wohlfundiert.
- $\prec_5 := \emptyset$ ist wohlfundiert.

Wohlfundierte Induktion

Die wohlfundierte Induktion verallgemeinert die vollständige Induktion.
Um für eine Menge A mit wohlfundierter Relation $\prec$ ein Prädikat

$$\forall a \in A.\, P(a)$$

zu zeigen, beweist man

- **Induktionsanfang** Man zeigt, dass für alle bezüglich $\prec$ minimalen Elemente m_i das Prädikat gilt.
- **Induktionsschritt** Man zeigt, dass wenn alle kleineren Elemente als n das Prädikat erfüllen, so auch n.

In Prädikatenlogik formuliert gilt

$$\forall a \in A.\, (\forall b \prec a.\, P(b) \to P(a)) \quad \text{gdw.} \quad \forall a \in A.\, P(a)$$

- Wo ist der Induktionsanfang?

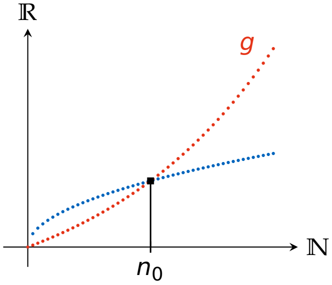
Definition (Asymptotisches Verhalten)

Eine Funktion g ist asymptotisch größer (wächst asymptotisch schneller) als eine andere Funktion f, wenn gilt

$$\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ |f(n)| < |g(n)|$$

- Der Einfachheit halber betrachten wir strikt positive Funktionen
- Dann sind die Beträge egal

- Oftmals sind Vorfaktoren nicht interessant



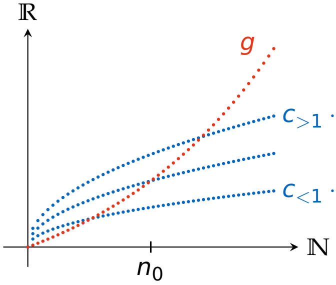
Definition (Asymptotisches Verhalten)

Eine Funktion g ist asymptotisch größer (wächst asymptotisch schneller) als eine andere Funktion f, wenn gilt

$$\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ |f(n)| < |g(n)|$$

- Der Einfachheit halber betrachten wir strikt positive Funktionen
- Dann sind die Beträge egal

- Oftmals sind Vorfaktoren nicht interessant



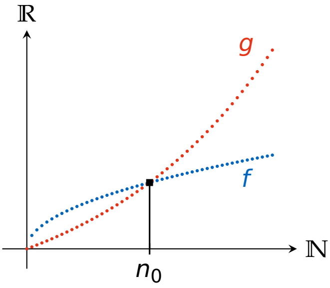
Definition (Asymptotische obere Schranke)

Seien f, g strikt positiv. Eine Funktion f wächst asymptotisch maximal so schnell wie eine Funktion g, wenn gilt

$$\exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 .\, f(n) \leq c \cdot g(n)$$

wir schreiben dann

$$f \in \mathcal{O}(g)$$



- $\mathcal{O}(g)$ ist eine Menge von Funktionen ...
- ... die maximal so schnell wachsen wie g

Definition (Landausymbole)

Seien f, g strikt positiv. Analog zu $\mathcal{O}(g)$ definiert man weitere Mengen von Funktionen.

$$o(g) := \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ f(n) < c \cdot g(n)\} \qquad \text{(langsamer)}$$

$$\mathcal{O}(g) := \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ f(n) \leq c \cdot g(n)\} \qquad \text{(nicht schneller)}$$

$$\Theta(g) := \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \qquad \text{(gleich schnell)}$$

$$\Omega(g) := \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ f(n) \geq c \cdot g(n)\} \qquad \text{(nicht langsamer)}$$

$$\omega(g) := \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0.\ f(n) > c \cdot g(n)\} \qquad \text{(schneller)}$$

Es ist

$$o(g) \subseteq \mathcal{O}(g) \qquad o(g) \cap \Omega(g) = \emptyset$$
$$\omega(g) \subseteq \Omega(g) \qquad \omega(g) \cap \mathcal{O}(g) = \emptyset$$

Satz (Landausymbole mit Grenzwerten)

Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right|$, *dann gilt*

$$
\begin{array}{lll}
f \in o(g) & \text{gdw.} & \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}\right| = 0 \\
f \in \mathcal{O}(g) & \text{gdw.} & 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty \\
f \in \Theta(g) & \text{gdw.} & 0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty \\
f \in \Omega(g) & \text{gdw.} & 0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}\right| \leq \infty \\
f \in \omega(g) & \text{gdw.} & \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty
\end{array}
$$