Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger

Winter 2013/14
7. November 2013

Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 4

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 13.11.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 4.1

Wir betrachten die folgenden Formeln über den aussagenlogischen Variablen A, B, C:

$$F_1 := ((A \wedge (B \rightarrow C)) \vee (\neg A \wedge C)) \quad F_2 := ((A \wedge \neg B) \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg B))) \quad F_3 := ((\neg A \leftrightarrow B) \wedge (B \wedge (A \vee C)))$$
$$F_4 := ((\neg A \wedge (C \rightarrow B)) \wedge (A \vee C)) \quad F_5 := ((A \wedge \neg B) \rightarrow (C \vee A)) \quad F_6 := (((C \wedge B) \vee A) \rightarrow \neg B)$$

(a) Zeichnen Sie zu den Formeln F_1 und F_2 jeweils den entsprechenden Syntaxbaum.

(b) Stellen Sie Wahrheitstabellen für alle Formeln auf.

Entscheiden Sie dann mit Hilfe der Tabellen, welche der Formeln gültig bzw. erfüllbar, aber nicht gültig bzw. unerfüllbar sind.

Geben Sie weiterhin an, wenn zwei Formeln semantisch äquivalent sind.

Hinweis: Die Wahrheitstabellen müssen wie in der VL (siehe Folien 60-64 in Aussagenlogik I) angegeben werden; einzig auf die Wiederholung der Wahrheitswerte unter den Variablen der Formel kann verzichtet werden.

Aufgabe 4.2

Pep ist Trainer der Jugendmannschaft beim lokalen Fußballverein. Um möglichen Streitereien aus dem Weg zu gehen, wer einen Elfmeter schießen darf, hat er folgende Anforderungen an eine mögliche Aufstellung seiner Spieler:

- Wenn Franck spielt, dann soll nicht Arjen spielen.
- Franck und Thomas spielen beide, oder keiner von beiden spielt.
- Zumindest Arjen oder Thomas spielen.

(a) Formalisieren Sie jede dieser Vorgaben als eine aussagenlogische Formel mit Hilfe der Variablen A (Arjen),F (Franck) und T (Thomas).

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob alle Vorgaben gleichzeitig umgesetzt werden können.

Gibt es mehrere Möglichkeiten, die Vorgaben umzusetzen?

Aufgabe 4.3 (a) und (b) werden als eigenständige Aufgaben gewertet.

Behauptung: Es seien F und H aussagenlogische Formeln mit $\models (F \rightarrow H)$. V_F sei die Menge der aussagenlogischen Variablen, welche in F vorkommen. Entsprechend sei V_H definiert. Es gelte $V_F \cap V_H \neq \emptyset$. Unter diesen Annahmen gibt es stets eine aussagenlogische Formel G mit $\models (F \rightarrow G)$ und $\models (G \rightarrow H)$, wobei G nur Variablen aus $V_F \cap V_H$ verwendet.

(a) Es gelte $F = ((A \wedge \neg(B \rightarrow C)) \vee \neg((B \vee C) \rightarrow A))$ und $H = ((A \wedge C) \rightarrow D)$.

(i) Zeigen Sie, dass tatsächlich $\models (F \rightarrow H)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Behauptung für diese gegebenen Formeln F, H korrekt ist, indem Sie eine entsprechende Formel G konstruieren.

Hinweis: Stellen Sie die Wahrheitstabelle zu $(F \rightarrow H)$ auf, um $\models (F \rightarrow H)$ zu zeigen. Überlegen Sie sich dann, in welchen Zeilen dieser Tabelle für die gesuchte Formel G notwendigerweise eine 1 eingetragen werden muss.

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptung stets gilt, indem Sie Ihre Konstruktion aus (a) verallgemeinern *und* die Korrektheit der Konstruktion zeigen.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 11.11.2013

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie, dass folgende Formeln semantisch äquivalent sind, indem Sie schrittweise die Formel auf der linken Seite unter Verwendung der Äquivalenzen aus der VL (Folien 89,90,91) in die Formel auf der rechten Seite transformieren. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendte Äquivalenz an.

(a) $((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A)) \equiv ((B \wedge \neg A) \vee C)$

(b) $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C))) \equiv (C \vee D)$.

Aufgabe 4.2

Es sei $F := ((\neg A \to B) \wedge ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B))$.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle zu F auf. Lesen Sie aus der Tabelle je eine semantisch äquivalente Formel in KNF bzw. DNF ab.

(b) Formen Sie F schrittweise unter Verwendung der Äquivalenzen aus der VL (Folien 89,90,91) in je eine semantisch äquivalente Formel in KNF bzw. DNF um.

Aufgabe 4.3

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf folgende Formel F an, um zu entscheiden, ob F erfüllbar ist, und ggf. eine erfüllende Belegung zu bestimmen.

$$F := ((A \to B) \vee (C \wedge B))$$

Hinweis: Der DPLL-Algorithmus aus den Folien lässt die Wahl des Literals im Falls der One-Literal-Clause-Regel bzw. im Fall der Fallunterscheidung offen. Nehmen Sie an, dass die One-Literal-Clause-Regel stets Vorrang hat. Weiterhin seien Literale L, L' wie folgt geordnet: L kommt vor L', falls

- beide Literale von derselben Variablen abgeleitet sind, wobei L das positive und L' das negative Literal ist (Bsp.: p vor $\neg p$); oder
- beide Literale von verschiedenen Variablen abgeleitet sind, die Variable zu L aber in der lexikographischen Ordnung vor der Variablen zu L' kommt (Bsp.: $\neg p$ vor q).

Hat der DPLL-Algorithmus die Wahl zwischen mehreren Literalen, so soll stets das Literal gewählt werden, dass bzgl. der beschriebenen Ordnung vor allen anderen zur Auswahl stehenden Literalen kommt.

Aufgabe 4.4

Entscheiden Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Formeln allgemeingültig sind:

(a) $F := ((\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B)$.

(b) $G := ((A \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge \neg D) \vee \neg A)$.

Wird nicht besprochen, Lösung per Mail an Prof. Esparza

Aufgabe 4.1

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, gibt es zu jeder aussagenlogischen Formel F eine semantisch äquivalente Formel $G = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ in konjunktiver Normalform (KNF). Die Teilformeln C_i sind dabei Disjunktionen von Literalen. Eine Formel in KNF ist in k-KNF, falls jedes C_i eine Disjunktion von (höchstens) k Literalen ist.

(a) Sei $G = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ in 2-KNF. Wie viele verschiedene Resolventen kann es dann in Abhängigkeit von n höchstens geben?

(b) Passen Sie Ihre Abschätzung aus (a) für den Fall an, dass G in 3-KNF ist. Welche obere Schranke für die Anzahl der Resolventen ergibt sich dann?