Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 12

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 22.01.2014 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Bemerkung: Wenn nicht weiter ausgeführt, ist unter einem *Graph* G entsprechend der Vorlesung stets ein Tupel $G = (V, E)$ mit V, E Mengen und $E \subseteq \binom{V}{2}$ zu verstehen; $\binom{V}{2}$ bezeichnet dabei die Menge aller 2-elementiger Teilmengen von V. Insbesondere enthält G kein Schleifen; je zwei Knoten sind höchstens durch eine Kante verbunden; und alle Kanten sind ungerichtet.

Aufgabe 12.1

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit mindestens 3 Knoten, der nicht vollständig ist.

Zeigen Sie: Dann gibt es $a, b, c \in V$ mit $\{a, b\} \in E$ und $\{b, c\} \in E$ und $\{a, c\} \notin E$.

Aufgabe 12.2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens 3 Knoten.

Zeigen Sie: Dann gibt es mindestens zwei Knoten, welche den gleichen Grad besitzen.

Aufgabe 12.3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt *Clique* von G, falls $\binom{W}{2} \subseteq E$, d.h. falls je zwei Knoten aus W durch eine Kante in G verbunden sind; W heißt *Anticlique* von G, falls W eine Clique in $\overline{G}$ ist. Wir schreiben kurz, dass W eine k-Clique ist, falls $|W| = k$; entsprechend sei k-Anticlique definiert.

Erinnerung: $\overline{G} := (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} := \binom{V}{2} - E$.

Zeigen Sie:

(a) Gilt $|V| \geq 4$, so besitzt G mindestens eine 2-Clique oder eine 4-Anticlique.

(b) Gilt $|V| \geq 20$, so besitzt G mindestens eine 4-Clique oder eine 4-Anticlique. *Hinweis*: Siehe HA 10.4.

Aufgabe 12.4 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph.

Zeigen Sie: G ist ein Baum genau dann, wenn gilt:

(a) G ist azyklisch; für jede Kante $\{u, v\} \in \binom{V}{2} - E$ gilt jedoch, dass $(V, E \cup \{\{u, v\}\})$ einen Kreis enthält.

(b) G ist zusammenhängend; für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt jedoch, dass $(V, E - \{\{u, v\}\})$ mehrere Zusammenhangskomponenten enthält.

(c) G ist azyklisch und $|E| = |V| - 1$.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 20.01.2014

Aufgabe 12.1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten. Wir zählen die Knoten beliebig auf: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dann ist $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ eine *Gradfolge* von G.

(a) Sei $(d_1, \ldots, d_n)$ eine Folge von natürlichen Zahlen. Wir nehmen an, dass die Folge absteigend sortiert ist ($d_i \geq d_{i+1}$).

Zeigen Sie: Es gibt einen Graphen mit Gradfolge $(d_1, \ldots, d_n)$ genau dann, wenn es einen Graphen mit Gradfolge $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ gibt.

(b) Entscheiden Sie für folgende Folgen, ob es jeweils einen Graphen mit entsprechender Gradfolge gibt:

$$(4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3), \quad (5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$$

Aufgabe 12.2

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, endlicher Graph.

(a) Geben Sie einen Algorithmus an, der einen Spannbaum zu G berechnet.

(b) Es sei nun ein Startknoten $v^* \in V$ gegeben. Geben Sie einen Algorithmus an, der einen Spannbaum T zu G berechnet, so dass für jeden Knoten w gilt: Der eindeutige Pfad in T, der v^* mit w verbindet, ist ein <u>kürzester</u> Pfad in G zwischen v^* und w.

Aufgabe 12.3

(a) Sei $G = (V, E)$ ein <u>gerichteter</u> Graph, d.h. $E \subseteq V \times V$ (Schleifen sind erlaubt).

Ein Eulerkreis in G ist entsprechend zum ungerichteten Fall ein Kreis in G, der jede Kante aus E genau einmal besucht.

Zeigen Sie: G besitzt eine Euler-Tour genau dann, wenn (1) für jeden Knoten die Anzahl der eingehenden Kanten gleich der Anzahl der ausgehenden Kanten ist und (2) es von jedem Knoten $u \in V$ einen Pfad in G zu jedem Knoten $v \in V$ gibt.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein Wort $w' \in \Sigma^*$ ist ein *Faktor* von einem Wort $w \in \Sigma^*$, falls es Wörtert x, y mit $w = xw'y$ gibt.

Bestimmen Sie für $\Sigma = \{a, b\}$ und $k = 3$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ der Länge $|w| = |\Sigma|^k + k - 1$, welches jedes Wort $w' \in \Sigma^k$ <u>genau einmal</u> als Faktor enthält (d.h. es gibt genau ein $x \in \Sigma^*$ und ein $y \in \Sigma^*$ mit $w = xw'y$).

Hinweis: Betrachten Sie den gerichteten Graphen mit Σ^2 als Knotenmenge.

Aufgabe 12.4 **Falls nicht bereits besprochen**

(a) Bestimmen Sie den Prüfercode des Baums mit $V = [7]$ und $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}\}$.

(b) Bestimmen Sie den Baum mit dem Prüfercode $8, 5, 4, 8, 4, 5$.