Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 6

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 27.11.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 6.1 Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.

Oecker ist krank und muß ins Krankenhaus. Hier wird er von einem Professor und einem Medizinstudenten untersucht. Danach entwickelt sich folgende ärztliche Diskussion:

Professor: Der Patient leidet an einer oder mehreren der folgenden sieben Krankheiten: dem Gummikauzwang (g), der Hirnversalzung (h), der intermittierenden Nasophobie (n), der Denkinsuffizienz (d), der Riechneurose (r), dem mentalen Großzehsyndrom (m) und der peripheren Hockanomalie (p).

„Angenommen, es ist Hirnversalzung, ...", versucht's der Student, „... dann kann er nicht am Gummikauzwang leiden", sagt streng der Professor.

Student: „Wenn er den Gummikauzwang hat, jedoch nicht an der Riechneurose leidet?"

Professor: „Dann hat er die Denkinsuffizienz. Und wenn der Patient nicht an der intermittierenden Nasophobie leidet, dann hat er, falls er nicht an Gummikauzwang erkrankt ist, das mentale Großzehsyndrom oder die Denkinsuffizienz oder gar diese beiden Leiden."

Student: „Wenn er nicht an der peripheren Hockanomalie leidet, ..."

Professor: „... dann hat er auch keine Denkinsuffizienz."

Student: „Wenn der Patient unter Gummikauzwang leidet,..."

Professor: „... dann hat er entweder eine periphere Hockanomalie oder eine Hirnversalzung, aber nicht beides. Falls er eine Riechneurose hat, dann hat er entweder intermittierende Nasophobie oder Gummikauzwang, aber nicht beides."

Student: „Wenn mentales Großzehsyndrom vorliegt, ..."

Professor: „... dann hat er auch eine Riechneurose und falls er an peripherer Hockanomalie erkrankt ist, hat er auch intermittierende Nasophobie. Falls er intermittierende Nasophobie hat, ist zwar eine Riechneurose auszuschließen, doch liegt dann ein Gummikauzwang vor".

„Und jetzt", fährt der Professor fort, „sollten Sie wissen, welche Krankheiten der Patient hat und welche nicht".

(a) Formalisieren Sie die Aussagen der Mediziner als aussagenlogische Formeln unter Verwendung der angegebenen aussagenlogischen Variablen.

Überführen Sie die Formel dann entsprechend der Vorlesung in KNF.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe aussagenlogischer Resolution, dass der Patient an Denkinsuffizienz (d) leiden muss!

(c) Verwenden Sie den DPLL-Algorithmus zusammen mit dem Wissen, dass der Patient an Denkinsuffizienz (d) leidet, um für jede der in Frage kommenden Krankheiten zu entscheiden, ob der Patient an ihr leider oder nicht.

(d) Beschreiben Sie, wie man die Resolutionsmethode verwenden muss, wenn man überprüfen will, dass die „Diagnose" (erfüllende Belegung) aus (c) die einzig mögliche Diagnose ist.

Hinweis: Sie müssen die Resolution nicht durchführen!

Aufgabe 6.2 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

Es sei $F := ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ mit A, B, C aussagenlogischen Variablen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass F gültig ist.

Halten Sie sich an das Verfahren aus der VL, um eine Formel in KNF zu überführen.

(b) Geben Sie einen formalen Beweis im Kalkül des natürlichen Schließens, dass F gültig ist.

Geben Sie bei jedem Beweisschritt die verwendete Regel an.

Aufgabe 6.3

Wir betrachten den Kalkül FL, der nur aus der Annahmenregel, der Regel zur Implikationsbeseitigung (Modus ponens) und den folgenden drei weiteren Basisregeln

Ax1 $(F \to (G \to F))$

Ax2 $((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$

Ax3 $((\neg F \to \neg G) \to (G \to F))$

besteht.

Vervollständigen Sie folgenden Beweis, indem Sie bei jeder Zeile angeben, ob diese mittels der Annahmeregel oder dem Modus ponens abgeleitet werden kann, bzw. ob es sich um eine Instanz eines Axioms handelt.

Geben Sie im Fall des Modus ponens an, auf welche vorangegangenen Formeln dieser angewandt wurde. Handelt es sich um eine Instanz eines Axioms, so geben Sie das Axiom und die verwendete Substitution an.

Beweis zu $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} A$.

- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} \neg\neg A$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} ((\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A))$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} ((\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A))$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} (\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A))$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} (\neg A \to \neg\neg\neg A)$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} (\neg\neg A \to A)$.
- $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{FL}} A$.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 25.11.2013

Aufgabe 6.1 **Modellierung I**

Sei A eine Menge und sei $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ eine Relation. Sei R ein Prädikatensymbol der Stelligkeit 2, und sei S eine Struktur mit Universum $U_S = A$ und $R_S = \mathcal{R}$. Dann stehe *Refl* für die Formel $R(x, x)$, so dass $\forall x Refl$ unter der Struktur S genau dann wahr ist, wenn die Relation $\mathcal{R}$ reflexiv ist. Wir sagen, dass $\forall x Refl$ die Aussage “$\mathcal{R}$ ist reflexiv” *formalisiert.*

(a) Formalisieren Sie die Aussagen: $\mathcal{R}$ ist symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv.

(b) Seien $\forall x \forall y Asym$ und $\forall x \forall y Antisym$ die Formeln aus (a), die die Aussagen “$\mathcal{R}$ ist asymmetrisch” und “$\mathcal{R}$ ist antisymmetrisch” formalisieren.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$\models \forall x \forall y (Asym \to Antisym)$$

(ii) Besagt die Formel aus (i) tatsächlich, dass jede asymmetrische Relation bereits antisymmetrisch ist?

(iii) Es seien F und G beliebige Formeln der Prädikatenlogik.

Man kann zeigen, dass $\models (\forall x \forall y (F \to G) \to (\forall x \forall y F \to \forall x \forall y G))$ gilt.

Zeigen Sie hiermit, dass aus (i) logisch folgt, dass jede asymmetrische Relation bereits antisymmetrisch ist.

Aufgabe 6.2

In der Mathematik kommt es häufig vor, dass man formalisieren will, dass es genau ein Objekt gibt, das eine Formel $F(x)$ erfüllt (d.h. das die durch die Formel beschriebene Eigenschaft besitzt). Man schreibt hierfür oft kurz $\exists! x F(x)$. Hierbei handelt es sich allerdings nicht um eine Formel der Prädikatenlogik 1. Stufe im strikten Sinne (vgl. auch $\forall x \in M\colon F(x)$ und $\exists x \in M\colon F(x)$).

Geben Sie eine Formel der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Gleichheit an, die genau dann wahr ist, wenn es genau ein Objekt in dem Universum gibt, das eine gegebene Formel $F(x)$ erfüllt.

Aufgabe 6.3 Modellierung III

Sei $P = \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte der euklidischen Ebene und G die Menge aller Gerade in der euklidischen Ebene, d.h. jedes $g \in G$ ist eine Menge der Gestalt $\{(a,b) + t \cdot (u,v) \mid (a,b) \in P, (u,v) \in P \setminus \{(0,0)\}, t \in \mathbb{R}\}$.

Wir betrachten Prädikatensymbole *Punkt*, *Gerade*, *Liegt_auf*, *Zwischen*. Sei S die Struktur mit Universum $P \cup G$ und folgender Interpretation der Prädikatensymbole:

- $\mathit{Punkt}_S = P$, $\mathit{Gerade}_S = G$.

  Intuitiv sagen $\mathit{Punkt}(x)$ bzw. $\mathit{Gerade}(x)$ aus, dass x ein Punkt bzw. eine Gerade ist.

- $\mathit{Liegt\_auf}_S$ ist die Menge der Paare $(a,g) \in P \times G$ mit $a \in g$.

  Intuitiv sagt $\mathit{Liegt\_auf}(x,y)$ aus, dass der Punkt a auf die Gerade g liegt (d.h., ein Punkt von g ist).

- $\mathit{Zwischen}_S$ ist die Menge der Tripeln $(a,b,c) \in P^3$ von Punkten, die auf einer gemeinsamen Gerade liegen, wobei der Punkt b zwischen den Punkten a und c, also b auf der die Punkte a und b verbindenden Strecke (Geradenstück) liegt.

Geben Sie Formeln an, die folgende Eigenschaften formalisieren (siehe auch hier):

(a) Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei verschiedene Punkte.

$$\text{Beispiellösung:}\quad \forall x(\mathit{Gerade}(x) \to \exists y \exists z(\mathit{Punkt}(y) \wedge \mathit{Punkt}(z) \wedge \neg(y = z) \wedge \mathit{Liegt\_auf}(y,x) \wedge \mathit{Liegt\_auf}(z,x)))$$

(b) Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen stets eine Gerade.

(c) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in einem Punkt oder überhaupt nicht.

(d) Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

(e) Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

(f) Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.

(g) Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

(h) Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser drei Punkte trifft; wenn dann die Gerade g durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

Hinweis: Sie dürfen "macros" verwenden (wie z.B. $\forall x \in M$ oder $\exists! x$).

Aufgabe 6.4

Es seien F, G beliebige Formeln der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Gleichheit.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Formel dann allgemeingültig ist:

$$H := (\forall x(F \to G) \to (\forall x F \to \forall x G))$$

Argumentieren Sie hierbei strikt anhand der Definition der Semantik der Prädikatenlogik.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt. D.h. geben Sie eine passende Struktur S an, die kein Modell von

$$((\forall x F \to \forall x G) \to \forall x(F \to G))$$

ist.