Übung 9: Zählen & Schubfachprinzip

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

17. Dezember 2013

Definition (Fakultät)

Die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

mit $0! := 1$.

Definition (Steigende und fallende Faktorielle)

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ ist

$$\begin{aligned} n^{\underline{m}} &:= \frac{n!}{(n-m)!} && \text{(fallende Faktorielle)} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{\overline{m}} &:= \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!} && \text{(steigende Faktorielle)} \\ &= n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m-1) \end{aligned}$$

Binomialkoeffizient

Definition (Binomialkoeffizient)

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Man sagt n über k oder k aus n.

- $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen zu wählen
- Rekursive Definition (hier nicht gezeigt)

Beispiel

Forrest hat eine Schachtel mit 10 verschiedenen Pralinen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, 4 davon zu essen?

$$\binom{10}{4} = 210$$

Definition (Multimenge)

Multimengen sind eine Verallgemeinerung gewöhnlicher Mengen.
Elemente können nun mehrfach vorkommen, die Reihenfolge spielt weiterhin keine Rolle.
Sie werden meist auch mit $\{\cdot\}$ notiert, alternativ $\{\!|\cdot|\!\}$.

Satz (Anzahl von Multiteilmengen)

Eine k-Multiteilmenge von M mit $|M| = n$ ist eine Multimenge, die k (nicht unbedingt verschiedene) Elemente aus M enthält.
Es gibt

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

solche Multiteilmengen.

Beispiel

- $M := \{1, 2, 2, 2, 3\} = \{2, 1, 2, 3, 2\} \qquad |M| = 5$

Doppeltes Abzählen

Ermittelt man die Mächtigkeit einer Menge auf zwei Arten, so müssen beide Ergebnisse übereinstimmen.
Eine so ermittelte Gleichung kann die gesuchte Mächtigkeit festlegen.

Beispiel (Matrizen)

In einer Matrix müssen die Summen von Zeilensummen und Spaltensummen übereinstimmen.

Beispiel (Studenten)

In einer Vorlesung sitzen 64 Studenten und n Studentinnen.
Jeder Student kennt genau 5 Studentinnen und jede Studentin 8 Studenten. Wenn „bekannt sein“ symmetrisch ist, wie viele Studentinnen besuchen die Vorlesung?

$$64 \cdot 5 = n \cdot 8$$

$$n = \frac{64 \cdot 5}{8} = 40$$

Definition (Schubfachprinzip)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $|X| > |Y|$.
Dann gilt

$$\exists y \in Y.\ \left|f^{-1}(y)\right| \geq 2$$

Wenn man n Elemente auf m < n Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens 2 Elemente enthält.

Definition (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $|X| > |Y|$.
Dann gilt

$$\exists y \in Y.\ \left|f^{-1}(y)\right| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$$

Wenn man n Elemente auf m < n Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens $\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$ Elemente enthält.