

Übung 9: Zählen & Schubfachprinzip

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

17. Dezember 2013

Definition (Fakultät)

Die **Fakultät** $n!$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n! := \prod_{i=1}^n i = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

mit $0! := 1$.

Definition (Steigende und fallende Faktorielle)

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ ist

$$\begin{aligned} n^{\underline{m}} &:= \frac{n!}{(n-m)!} && \text{(fallende Faktorielle)} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{\overline{m}} &:= \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!} && \text{(steigende Faktorielle)} \\ &= n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+m-1) \end{aligned}$$

Definition (Binomialkoeffizient)

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge an.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!}$$

Man sagt n über k oder k aus n .

- $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen zu wählen
- Rekursive Definition (hier nicht gezeigt)

Beispiel

Forrest hat eine Schachtel mit 10 verschiedenen Pralinen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, 4 davon zu essen?

- $\binom{10}{4} = 210$

Definition (Multimenge)

Multimengen sind eine Verallgemeinerung gewöhnlicher Mengen. Elemente können nun mehrfach vorkommen, die Reihenfolge spielt weiterhin keine Rolle.

Sie werden meist auch mit $\{\cdot\}$ notiert, alternativ $\{\cdot\}$.

Satz (Anzahl von Multiteilmengen)

Eine *k -Multiteilmenge* von M mit $|M| = n$ ist eine Multimenge, die k (nicht unbedingt verschiedene) Elemente aus M enthält.

Es gibt

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

solche Multiteilmengen.

Beispiel

$$\blacksquare M := \{1, 2, 2, 2, 3\} = \{2, 1, 2, 3, 2\} \quad |M| = 5$$

Doppeltes Abzählen

Ermittelt man die **Mächtigkeit** einer Menge auf zwei Arten, so müssen beide Ergebnisse **übereinstimmen**.

Eine so ermittelte Gleichung kann die gesuchte Mächtigkeit festlegen.

Beispiel (Matrizen)

In einer Matrix müssen die Summen der Zeilensummen und Summen der Spaltensummen übereinstimmen.

Beispiel (Studenten)

In einer Vorlesung sitzen **64 Studenten** und **n Studentinnen**. Jeder Student kennt genau **5 Studentinnen** und jede Studentin **8 Studenten**. Wenn „bekannt sein“ symmetrisch ist, wie viele Studentinnen besuchen die Vorlesung?

$$64 \cdot 5 = n \cdot 8$$

$$n = \frac{64 \cdot 5}{8} = 40$$

Definition (Schubfachprinzip)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $|X| > |Y|$.
Dann gilt

$$\exists y \in Y. |f^{-1}(y)| \geq 2$$

Wenn man n Elemente auf $m < n$ Fächer verteilt, dann gibt es **mindestens ein Fach**, das mindestens **2** Elemente enthält.

Definition (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $|X| > |Y|$.
Dann gilt

$$\exists y \in Y. |f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$$

Wenn man n Elemente auf $m < n$ Fächer verteilt, dann gibt es **mindestens ein Fach**, das mindestens $\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$ Elemente enthält.