# Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 13

*Beachten Sie:* Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

## Hausaufgaben: Abgabe bis zum 29.01.2014 um 12:00

**Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.**

### Aufgabe 13.1

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher zusammenhängender Graph. Eine Kante $\{u, v\} \in E$ heißt *Brücke* von $G$, falls $G$ durch das Entfernen von $\{u, v\}$ in mehrere Zusammmenhangskomponenten zerfallen würde.

Zeigen Sie: Hat jeder Knoten von $G$ einen geraden Grad, so kann $G$ keine Brücke besitzen.

### Aufgabe 13.2

(a) Bestimmen Sie den Prüfercode des Baums mit $V = [8]$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}\}$.

(b) Bestimmen Sie den Baum mit dem Prüfercode $10, 6, 10, 1, 1, 6, 1, 10$.

### Aufgabe 13.3 **Teilaufgaben (a) und (b) werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen, ob diese eine Gradfolge eines einfachen Graphen ist:

$$(i)\ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7) \quad (ii)\ (0, 1, 2, 2, 3, 3, 4), \quad (iii)\ (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 9), (iv)\ (2, 3, 4, 5, 6)$$

(b) Geben Sie einen einfachen Graph mit Gradfolge an (es reicht, den Graph zu zeichnen):

$$(2, 2, 3, 4, 4, 5)$$

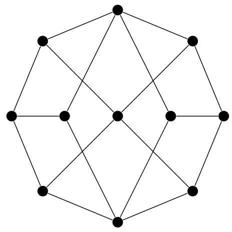
### Aufgabe 13.4

Seien $n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

Es gibt genau dann einen Baum mit $n$ Knoten und Knotengraden $d_1, \dots, d_n$, wenn $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ gilt.

### Aufgabe 13.5

(a) Zeigen Sie, dass folgender Graph keinen Hamiltonkreis besitzt:



(b) Für welche Werte von $m$ und $n$ enthält der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ einen Hamiltonkreis?

# Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 27.01.2014

## Aufgabe 13.1

Bestimmen Sie für folgendes Programm die minimale Anzahl an Registern, die benötigt werden, so dass zu jedem Zeitpunkt alle für eine Anweisung benötigten Werte in Registern vorliegen:

```
int a,b,c,d,e,f;
...
while(true) {
  a = b+c;
  d = -a;
  e = d+f;
  if( c > 0 ) {
    f = 2 * e;
  } else {
    b = d+e;
    e = e-1;
    if( e < 0 )
      return b;
  }
  b = f+c;
  if( b < 0 )
    return b;
}
```

(a) Stellen Sie hierfür das Programm zunächst als einen gerichteten Graphen dar: Jeder Knoten sollte dabei eine Zuweisung darstellen, jede Kante einen möglichen Schritt des Programm von einer Zuweisung zur nächsten.

(b) Betrachten Sie die Zuweisung $e = d + f$: Bestimmen Sie anhand des Graphs, welche Zuweisungen (Knoten) die aktuellen Werte von $d$ und $f$ gesetzt haben. Markieren Sie entsprechend die Kanten mit einem $d$ bzw. $f$, entlang welcher der Wert von $d$ bzw. $f$ weitergereicht werden muss. Wiederholen Sie dies für alle restlichen Zuweisungen.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kantenbeschriftungen aus (b) einen einfachen Graphen, der gerade beschreibt, wann zwei Variablen in verschiedenen Registern gespeichert werden müssen. Benutzen Sie dann diesen einfachen Graphen, um die ursprüngliche Frage zu beantworten. Wie hängt das Problem mit der Färbbarkeit von Graphen zusammen?

## Aufgabe 13.2

Ein Graph ist dreiecksfrei, wenn er keine 3-Clique enthält.

Zeigen Sie: Für jeden zusammenhängenden planaren einfachen dreiecksfreien Graphen $G = (V, E)$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.

## Aufgabe 13.3

(a) $n$ Hirten müssen ihre Herden in $m$ Ställe treiben. Aus aufgabentechnischen Gründen muss jeder Hirte einen Teil seiner Herde in jeden der $m$ Ställe treiben. Die Hirten wollen dabei sicherstellen, dass sich nicht aus Versehen ein Schaf entschließt einer anderen Herde zu folgen.

Sie suchen daher nach einer Möglichkeit, ihre „Schaftströme" so durch die Ebene zu den Ställen zu lotsen, dass sich die Ströme niemals kreuzen!

Für welche Werte von $n$ und $m$ ist das möglich?

(b) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass jeder Hirte seine Schafe nur zu $d \leq m$ Ställen treiben muss. Dabei können sich die Hirten unter einander absprechen, welcher Hirte welche $d$ Ställe beliefert.

Für welche Werte von $n$, $m$ und $d$ gibt es nun eine Lösung?

## Aufgabe 13.4

Sei $H \subseteq F \times M$ eine stabile Heirat. Wir schreiben $fH$ für den Mann, der der Frau $f \in F$ unter $H$ zugeordnet wird; entsprechend steht $Hm$ für die Frau, die einem Mann $m \in M$ unter $H$ zugeordent wird.

Zeigen Sie, dass die durch den Gale-Shapely-Algorithmus berechnete Heirat $H$ folgende Eigenschaft besitzt:

Ist $H'$ eine weitere stabile Heirat, so gilt für jeden Mann $m \in M$, dass er seine Partnerin $Hm$ <u>mindestens</u> so sehr präferiert wie $H'm$. (D.h. $H$ ist somit für alle Männer die bestmögliche Lösung.)