Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger

Winter 2013/14
30. Oktober 2013

Diskrete Strukturen –Aufgabenblatt 3

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 06.11.2013 um 12:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 3.1 Teil (c) wird separat gewertet.

Im Folgenden betrachten wir das feste Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ und definieren verschiedene binäre Relationen über A^*.

- Entscheiden Sie für jede dieser Relationen, ob sie reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv ist.
- Geben Sie weiterhin an, ob es sich um eine Äquivalenzrelation, eine partielle Ordnung, eine totale Ordnung oder nichts davon handelt.

(a) uRw gdw. $|u| = |w|$.

(b) uRw gdw. „u ist ein *echter* Suffix von w", d.h. es gibt ein Wort $x \in A^*$ der Länge mindestens 1, so dass $xu = w$.

(c) uRw gdw. „w ist eine zyklische Permutation von u", d.h. es gibt $x, y \in A^*$, so dass $u = xy$ und $w = yx$.

Aufgabe 3.2

Es sei $f : X \to Y$. Wir definieren dann auf X die Relation $\equiv_f$ durch:

$$x \equiv_f x' \text{ genau dann, wenn } f(x) = f(x').$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv_f$ stets eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Sei $X/\equiv_f$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\equiv_f$. Zeigen Sie, dass $|X/\equiv_f| = |Y|$ gilt, falls f surjektiv ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Setze $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Die Funktion $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ordnet jedem $x \in \mathbb{Z}$ den eindeutig bestimmten Rest in $\mathbb{Z}_n$ bei Division durch n, d.h. $x - f_n(x)$ ist eine durch n teilbare Zahl.

Wir schreiben kurz $\equiv_n$ für $\equiv_{f_n}$.

- Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\equiv_n$.
- In welcher Beziehung steht $\mathbb{Z}_n$ zu $\mathbb{Z}/\equiv_n$?

Aufgabe 3.3

Sei $f : X \to Y$ eine (totale) Funktion. Für $M \subseteq X$ gelte wie üblich $f(M) := \{f(m) \mid m \in M\}$.

Zeigen Sie, dass für $A, B \subseteq X$ bzw. $M, N \subseteq Y$ gilt:

(a) Aus $f(A) \subseteq f(B)$ folgt im Allgemeinen nicht $A \subseteq B$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Geben Sie auch ein Beispiel für $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

(c) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

(d) $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$, falls $N \subseteq M$.

Aufgabe 3.4

Es gelte $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (4, 3)\}$ und $S = \{(1, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.

Bestimmen Sie RS, SR, $R^{-1}S$, RR, R^+, S^+, R^*.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 04.11.2013

Aufgabe 3.5

Wir betrachten die folgenden Formeln:

- $((p \wedge q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \wedge t))$.
- $(((p \rightarrow q) \wedge (p \vee (q \rightarrow t))) \vee \neg q)$
- $(\neg\neg\neg p \vee \neg\neg(q \vee (r \rightarrow p)))$

(a) Zeichnen Sie zu jeder der Formeln den zugehörigen Syntaxbaum.

(b) Entfernen sie bei jeder Formel die Klammern, die bei Verwendung der Bindungsregeln überflüssig werden.

(c) Stellen Sie für jede der Formeln eine Wahrheitstabelle auf.

Entscheiden Sie dann, welche der Formeln gültig, nur erfüllbar oder unerfüllbar ist.

Hinweis: Um die Wahrheitstabelle eindeutig zu machen, ordnen Sie die aussagenlogischen Variablen zunächst lexikographisch wachsend von links nach rechts (hier: $pqrst$) und tragen in die i-te Zeile (mit $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ bei n Variablen) als Belegung gerade die Binärdarstellung der Zahl i ein, wobei das höchstwertige Bit ganz links steht, also die Belegung der ersten Variable (hier: p) angibt.

Aufgabe 3.6

Klammern Sie die folgenden Formeln vollständig unter Beachtung

- der Bindungsregeln wie in der VL definiert (Bindungsstärke der Operatoren in absteigender Stärke: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) und
- sind $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (korrekt geklammerte) Formeln, so steht $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \ldots \rightarrow F_n$ für die Formel $(F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow (\ldots(F_{n-1} \rightarrow F_n)\ldots)))$,

so dass es sich um Formeln im strikten Sinne handelt.

(a) $A \wedge B \vee C \rightarrow \neg D \rightarrow D$

(b) $A \wedge B \rightarrow C \rightarrow A \vee B \rightarrow C$.

(c) $\neg(\neg(A \wedge B) \rightarrow B \wedge A) \rightarrow C$.

Aufgabe 3.7

Das n-Damenproblem besteht darin, n Damen (Schachfigur) auf einem $n \times n$ Schachbrett so zu positionieren, dass keine Dame eine ander Dame schlägt bzw. „sieht”: Eine Dame „sieht” dabei nur alles, was in ihrer Reihe (x-Achse), ihrer Spalte (y-Achse) oder in einer ihrer 45°-Diagonalen steht.

Die Felder des Schachbretts seien mit $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ bezeichnet, wobei $(0, 0)$ das unterste linke Feld und $(n-1, n-1)$ das oberste rechte Feld ist.

Wir führen die aussagenlogischen Variablen $D_{x,y}$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}_n$ ein, wobei $D_{x,y}$ für die Aussage steht, dass eine Dame auf dem Feld (x, y) steht.

Übersetzen Sie folgende umgangsprachliche Anforderungen in aussagenlogische Formeln.

(a) In jeder Spalte (Reihe) steht eine Dame.

(b) Keine zwei Damen stehten in derselben Spalte (Reihe).

(c) Keine zwei Damen stehen in derselben Diagonalen.

(d) Keine zwei Damen dürfen sich „sehen”.

Aufgabe 3.8

(a) Geben Sie aussagenlogische Formeln F_1, F_2, F_3 an, so dass jede Formel $F_i \wedge F_j$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ beliebig erfüllbar ist, jedoch $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ unerfüllbar ist.

(b) Verallgemeinern Sie (a) von $n = 3$ auf für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.9 *** wird nicht besprochen, Lösung wieder per Mail an Prof. Esparza**

Offensichtlich gibt es genau 2^4 Abbildungen von $\{0,1\}^2$ nach $\{0,1\}$.

Durch jede dieser Funktionen f kann ein binärer Operator O_f definiert werden: Sind x, y aussagenlogische Variablen, so ist die Semantik der Formel (xO_fy) durch

$$[(xO_fy)](\beta) = f(\beta(x), \beta(y))$$

für jede zu (xO_fy) passende Belegung β definiert.

Beispiel: Der Operator O_f, der durch die Funktion $f = \{((0,0),1),((0,1),1),((1,0),1),((1,1),0)\}$ definiert wird, wird auch als NAND (kurz: $\overline{\wedge}$) bezeichnet, da $(xO_fy) \equiv \neg(x \wedge y)$.

Entsprechend definiert die Funktion $g = \{((0,0),1),((0,1),0),((1,0),0),((1,1),0)\}$ den Operator NOR (kurz: $\overline{\vee}$) mit $(xO_gy) \equiv \neg(x \vee y)$.

Der Operator O_f heißt vollständig, falls für jede aussagenlogische Formel F (wie in der VL definiert) eine Formel G existiert, so dass

- In G treten nur der Operator O_f und aussagenlogische Variablen auf (G verwendet somit keine Konstanten), und
- F und G sind semantisch äquivalent ($F \equiv G$), d.h. für jede zu F und G passende Belegung β gilt: $[F](\beta) = [G](\beta)$.

Zeigen Sie:

(a) NAND ($\overline{\wedge}$) und NOR ($\overline{\vee}$) sind vollständig.

(b) Alle verbleibenden binären Operatoren sind nicht vollständig.

(c) Bleibt (b) richtig, wenn man auch Konstanten in G erlaubt?