Übung 3: Aussagenlogik

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

4. November 2013

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Aussagenlogische Formeln bestehen aus Konstanten, Variablen und Operatoren. Die Menge $\mathcal{F}$ aller Formeln ist induktiv definiert.

- $\text{false} = 0 \in \mathcal{F}, \quad \text{true} = 1 \in \mathcal{F}$ (Konstanten)
- $V = \{a, b, c, \dots\} \subseteq \mathcal{F}$ (Variablen)
- Ist $A \in \mathcal{F}$ eine aussagenlogische Formel, dann auch

$$\neg A \in \mathcal{F} \qquad \text{(Negation)}$$

- Sind $A, B \in \mathcal{F}$ aussagenlogische Formeln, dann auch

$$(A \wedge B) \in \mathcal{F} \qquad \text{(Konjunktion)}$$

$$(A \vee B) \in \mathcal{F} \qquad \text{(Disjunktion)}$$

$$(A \Rightarrow B) \in \mathcal{F} \qquad \text{(Implikation)}$$

Alle Formeln lassen sich so konstruieren.

Operatorenbindung

Definition (Bindungsregeln)

Die Bindungsstärke der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$$

Die Implikation ist rechtsassoziativ

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \quad \text{steht für} \quad (a \Rightarrow (b \Rightarrow (c \Rightarrow d)))$$

- Üblicherweise klammert man $\wedge$ und $\vee$

$$(a \wedge b) \vee c \quad \text{statt} \quad a \wedge b \vee c$$

Beispiel

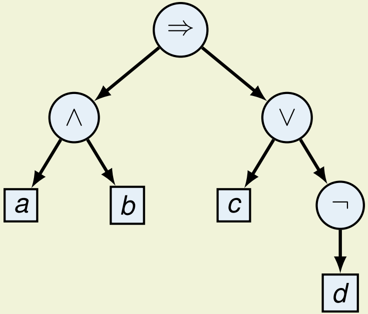
- $\neg a \wedge b$ steht für $((\neg a) \wedge b)$
- $a \wedge b \Rightarrow c \vee \neg d$ steht für $((a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (\neg d)))$

Syntaxbaum

Syntaxbäume visualisieren in welcher Reihenfolge die Regeln zur induktiven Definition angewandt werden müssen, um eine Formel zu erzeugen.

Beispiel

Sei $F := a \wedge b \Rightarrow c \vee \neg d$ dann ist der dazu passende Syntaxbaum



Definition (Belegung)

Eine passende Belegung β zu einer Formel F ordnet jeder Variable in V einen Wahrheitswert aus $\{0, 1\}$ zu. Es ist

$$\beta : V \to \{0, 1\}$$

- Belegungen formalisieren Einsetzen
- Für n Variablen existieren 2^n Belegungen

Beispiel

Sei $F := \neg(a \wedge b)$ mit $V = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} \beta : \{a, b\} &\to \{0, 1\} \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Dann ist β eine zu F passende Belegung.

Definition (Semantik einer Formel)

Die Semantik $[F]$ einer aussagenlogischen Formel F ist eine Funktion, die jeder passenden Belegung β einen Wahrheitswert zuordnet.
Sei $\mathcal{B} = \{\beta_0, \beta_1, \ldots\}$ die Menge aller Belegungen zu F. Dann ist

$$[F] : \mathcal{B} \to \{0, 1\}$$

- Die Semantik löst eingesetzte Formeln auf
- Wird anhand der induktiven Syntax definiert
- Es gibt syntaktisch verschiedene Formeln gleicher Semantik

Beispiel

Sei $F := (G \Rightarrow H)$ mit G, H Formeln. Dann ist

$$[F](\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } [G](\beta) = 1 \text{ und } [H](\beta) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer Wahrheitstabelle visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \Rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\Rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer Wahrheitstabelle visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \Rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\Rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer Wahrheitstabelle visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \Rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\Rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Äquivalente Formeln

Definition (Äquivalente Formeln)

Man nennt zwei Formeln äquivalent, wenn sie dieselbe Semantik besitzen.
Seien F, G Formeln mit Belegungen $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$. F und G sind äquivalent wenn

$$\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = [G](\beta)$$

Man schreibt $F \equiv G$ oder $F \Leftrightarrow G$.

Beispiel

Für $F := a \Rightarrow b$ und $G := \neg a \vee b$ gilt $F \equiv G$.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg a$	$\vee$	b
0	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	

Eigenschaften aussagenlogischer Formeln

Sei F eine aussagenlogische Formel mit Variablen V und der Menge der passenden Belegungen $\mathcal{B}$. Man nennt F

erfüllbar	$\exists \beta \in \mathcal{B}.[F](\beta) = 1$	(F kann wahr sein)
unerfüllbar	$\forall \beta \in \mathcal{B}.[F](\beta) = 0$	(F ist nie wahr)
gültig	$\forall \beta \in \mathcal{B}.[F](\beta) = 1$	(F ist immer wahr)

- Eine unerfüllbare Formel nennt man Widerspruch
- Eine gültige Formel nennt man Tautologie