Übung 1: Mengen

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

2. Dezember 2013

Organisatorisches

- Markus Kaiser
  - Mail: tutor@zfix.org
  - Web: ds.zfix.org
- Vorlesung
  - Dienstag 13:45-15:15 in MI HS1
  - Donnerstag 10:15-11:45 in MI HS1
- Meine Tutorübungen
  - Dienstag 12:00-14:00 in 03.09.014
  - Dienstag 16:15-17:45 in 03.11.018
  - Offiziell müsst ihr in die angemeldete Übung!

Übungsablauf

- Hausaufgaben
  - Abgabedatum auf Übungsblatt
  - Abgabe in Briefkästen, Rückgabe in Tutorübung
  - Geheftet, Handschriftlich, Deckblatt
  - Teams aus 3 oder 4 Stundenten
  - Teams nicht änderbar, nicht gruppenübergreifend
  - Üblicherweise etwa so schwer wie Klausuraufgaben
- Notenbonus
  - „Bepunktung“ mit Ampelfarben
  - Bei $\frac{2}{3}$ mindestens gelb
  - 0.3 Notenstufen Bonus auf bestandene Klausur
- Tutoraufgaben
  - Lösen wir zusammen in den Übungen
  - Üblicherweise schwerer als Klausurstoff

Was machen wir hier?

- Mathematische Grundlagen
  - Mengen, Relationen, Funktionen
  - Logik
  - Beweise
- Kombinatorik
  - Zählkoeffizienten
  - Spaß mit Urnen
- Graphentheorie
  - Definition
  - Ein paar Algorithmen
- Algebra
  - Modulo
  - Algebren
  - Gruppen, vielleicht Körper

Definition (Menge)

Eine Menge ist eine ungeordnete Sammlung unterscheidbarer Objekte.
Mit Mengenklammern werden Objekte zusammengefasst.

$$A := \{a, b, \dots, z\}$$

Man nennt a ein Element von A, es gilt $a \in A$.

- Reihenfolge ist egal
- Elemente kommen nicht mehrfach vor

Beispiel

- $\{a, b, c, a, c\} = \{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\varnothing := \{\}$

Definition (Extensionale Schreibweise)

Die extensionale Schreibweise einer Menge zählt ihre Elemente auf.

$$M := \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Beispiel

- $A := \{2, 4, 6, \ldots\}$
- $B := \{1, 2, 3, 4\} = [4]$
- $C := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
- $D := \{\alpha, a, ☺, 8, \{1, 2\}, \mathbb{N}\}$

Definition (Intensionale Schreibweise)

Die intensionale Schreibweise beschreibt eine Menge durch charakteristische Eigenschaften.

$$M := \{x \in \Omega \mid P(x)\}$$

M enthält alle Elemente im Universum Ω mit der Eigenschaft P.

Beispiel

- $A := \{2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\} = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$
- $B := \{1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$
- $C := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ prim}\}$

Bezeichnungen

- Objekte in Mengen

  $a \in A$ a ist Element von A
  $b \notin A$ b ist kein Element von A
  $|A|$ Anzahl der Elemente in A, Kardinalität

- Relationen zwischen Mengen

  $B \subseteq A$ B ist Teilmenge von A, $\quad x \in B \rightarrow x \in A$
  $B \subset A$ B ist echte Teilmenge von A
  $B = A$ $B \subseteq A$ und $A \subseteq B$

Beispiel

- $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$, aber $9 \notin \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, aber $\{1, 5\} \not\subseteq \{1, 2\}$
- $\emptyset \subseteq [5] \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Operationen

$\overline{A}$	$:= \{x \mid x \notin A\}$	Komplement
$A \cup B$	$:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	Vereinigung
$A \cap B$	$:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	Schnitt
$A \setminus B$	$:= A \cap \overline{B}$	Differenz
$A \triangle B$	$:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Symmetrische Differenz

Für mehrere Mengen schreibt man

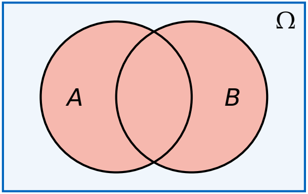
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

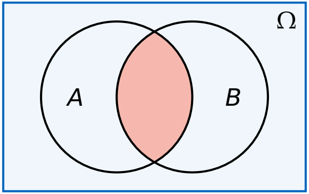
Venn-Diagramme

Venn-Diagramme visualisieren Mengen $A, B, \ldots$ im Universum Ω.

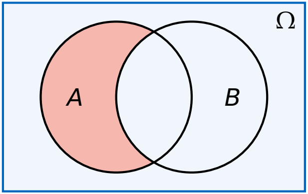
- $A \cup B$



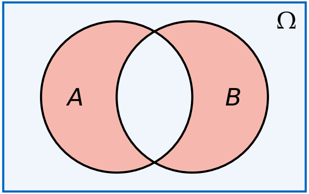
- $A \cap B$



- $A \setminus B$



- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Satz (De Morgansche Gesetze)

Sind A, B Mengen, dann gilt

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Für Mengen A_i gilt

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

- Zusammen mit $\overline{\overline{A}} = A$ wichtigste Regel
- Gilt auch in der Aussagenlogik

Definition (Potenzmenge)

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ zu einer Menge M ist die Menge all ihrer Teilmengen.

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\}$$

- $\mathcal{P}(M)$ enthält für endliche Mengen genau $2^{|M|}$ Elemente
- Man schreibt deshalb auch 2^M
- Es ist $M \in \mathcal{P}(M)$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

Beispiel

Für $M = \{a, b, c\}$ ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

mit $|\mathcal{P}(M)| = 2^3 = 8$

Definition (Tupel)

Ein n-Tupel ist eine geordnete Sammlung n beliebiger Objekte.
Mit Tupelklammern werden Objekte zusammengefasst.

$$T := (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

- Reihenfolge nicht egal
- Elemente dürfen mehrmals vorkommen

Beispiel

- $(a, b, c) \neq (c, a, b) \neq (a, b, c, a, c)$
- $(1, 2, 3) \neq \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$
- $(\{\alpha, \beta\}, \emptyset, \mathbb{N})$

Definition (Kreuzprodukt)

Sind A, B Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt (Kreuzprodukt)

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für Mengen A_i ist

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

- Für endliche A_i ist $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$
- Man schreibt $A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\text{n mal}}$ mit $A^0 = \{\emptyset\}$

Beispiel

- $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$
- $\{\alpha, \beta\}^2 = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$