

# Übung 3: Aussagenlogik

## Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

2. Dezember 2013

## Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Aussagenlogische **Formeln** bestehen aus Konstanten, Variablen und Operatoren. Die Menge  $\mathcal{F}$  aller Formeln ist induktiv definiert.

■  $\text{false} = 0 = \perp \in \mathcal{F}$ ,  $\text{true} = 1 = \top \in \mathcal{F}$  (Konstanten)

■  $V = \{a, b, c, \dots\} \subseteq \mathcal{F}$  (Variablen)

■ Ist  $A \in \mathcal{F}$  eine aussagenlogische Formel, dann auch

$\neg A \in \mathcal{F}$  (Negation)

■ Sind  $A, B \in \mathcal{F}$  aussagenlogische Formeln, dann auch

$(A \wedge B) \in \mathcal{F}$  (Konjunktion)

$(A \vee B) \in \mathcal{F}$  (Disjunktion)

$(A \rightarrow B) \in \mathcal{F}$  (Implikation)

Alle Formeln lassen sich so konstruieren.

## Definition (Bindungsregeln)

Die **Bindungsstärke** der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Die Implikation ist **rechtsassoziativ**

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \text{ steht für } (a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)))$$

- Üblicherweise klammert man  $\wedge$  und  $\vee$

$$(a \wedge b) \vee c \text{ statt } a \wedge b \vee c$$

## Beispiel

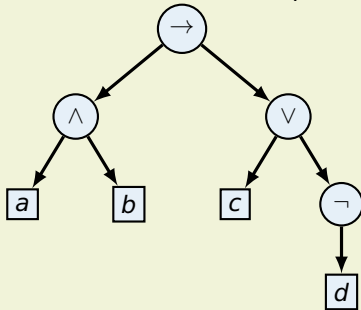
- $\neg a \wedge b$  steht für  $((\neg a) \wedge b)$
- $a \wedge b \rightarrow c \vee \neg d$  steht für  $((a \wedge b) \rightarrow (c \vee (\neg d)))$

## Syntaxbaum

**Syntaxbäume** visualisieren in welcher Reihenfolge die Regeln zur induktiven Definition angewandt werden müssen, um eine Formel zu erzeugen.

## Beispiel

Sei  $F := a \wedge b \rightarrow c \vee \neg d$  dann ist der dazu passende Syntaxbaum



## Definition (Belegung)

Eine passende **Belegung**  $\beta$  zu einer Formel  $F$  ordnet jeder Variable in  $V$  einen Wahrheitswert aus  $\{0, 1\}$  zu. Es ist

$$\beta : V \rightarrow \{0, 1\}$$

- Belegungen formalisieren Einsetzen
- Für  $n$  Variablen existieren  $2^n$  Belegungen

## Beispiel

Sei  $F := \neg(a \wedge b)$  mit  $V = \{a, b\}$  und

$$\beta : \{a, b\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$a \mapsto 1$$

$$b \mapsto 0$$

Dann ist  $\beta$  eine zu  $F$  passende **Belegung**.

## Definition (Semantik einer Formel)

Die **Semantik**  $[F]$  einer aussagenlogischen Formel  $F$  ist eine Funktion, die jeder passenden Belegung  $\beta$  einen Wahrheitswert zuordnet. Sei  $\mathcal{B} = \{\beta_0, \beta_1, \dots\}$  die Menge aller Belegungen zu  $F$ . Dann ist

$$[F] : \mathcal{B} \rightarrow \{0, 1\}$$

- Die Semantik löst eingesetzte Formeln auf
- Wird anhand der induktiven Syntax definiert
- Es gibt **syntaktisch verschiedene** Formeln gleicher **Semantik**

## Beispiel

Sei  $F := (G \rightarrow H)$  mit  $G, H$  Formeln. Dann ist

$$[F](\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } [G](\beta) = 1 \text{ und } [H](\beta) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

## Beispiel

Sei  $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$ . Die zu  $[F]$  gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

## Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

## Beispiel

Sei  $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$ . Die zu  $[F]$  gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	



## Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

## Beispiel

Sei  $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$ . Die zu  $[F]$  gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	$\rightarrow$	$\neg c$	$\wedge$	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

## Definition (Äquivalente Formeln)

Man nennt zwei Formeln **äquivalent**, wenn sie dieselbe Semantik besitzen.

Seien  $F, G$  Formeln mit Belegungen  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$ .  $F$  und  $G$  sind äquivalent wenn

$$\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = [G](\beta)$$

Man schreibt  $F \equiv G$  oder  $F \leftrightarrow G$ .

## Beispiel

Für  $F := a \rightarrow b$  und  $G := \neg a \vee b$  gilt  $F \equiv G$ .

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg a$	$\vee$	b
0	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	

## Eigenschaften aussagenlogischer Formeln

Sei  $F$  eine aussagenlogische Formel mit Variablen  $V$  und der Menge der passenden Belegungen  $\mathcal{B}$ . Man nennt  $F$

**erfüllbar**  $\exists \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 1$  ( $F$  kann wahr sein)

**unerfüllbar**  $\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 0$  ( $F$  ist nie wahr)

**gültig**  $\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 1$  ( $F$  ist immer wahr)

- Eine unerfüllbare Formel nennt man **Widerspruch**
- Eine gültige Formel nennt man **Tautologie**